Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

КАШАЕВ Тимур Рустамович

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ СУММ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

01.01.05 – теория вероятностей
и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор В.Ю. Королёв

Москва, 2003 г.

Содержание

Введение

Суммы случайного числа случайных величин (для краткости мы будем использовать термин "случайные суммы") играют важную роль в математическом моделировании многих процессов и явлений. Многочисленные примеры задач из самых различных областей науки и практики, в которых случайные суммы являются базовыми математическими моделями, можно найти, например, в монографиях В. М. Круглова и В. Ю. Королева (Круглов и Королев, 1990) и Б. В. Гнеденко и В. Ю. Королева (Gnedenko and Korolev, 1996). Здесь же мы ограничимся упоминанием лишь тех приложений, о которых пойдет речь в диссертации. К их числу в первую очередь относится теория риска – математическая теория страхования. Здесь нецентрированные случайные суммы являются моделями суммарных страховых требований (выплат) за некоторый промежуток времени; центрированные случайные суммы являются моделями остаточного резерва страховых выплат. В последнем случае центрирование может осуществляться как неслучайными величинами (что соответствует детерминированному поступлению страховых премий), так и случайными величинами (что соответствует случайным страховым премиям и, возможно, учету других случайных факторов, влияющих на величину резерва).

Асимптотическая теория случайного суммирования является активно развивающимся разделом теории вероятностей. В подтверждение этого в дополнение к уже упоминавшимся монографиям (Круглов и Королев, 1990) и (Gnedenko and Korolev, 1996) упомянем книги А. Гута (Gut, 1988), В. Ю. Королева (Королев, 1997), В. В. Калашникова (Kalashnikov, 1997) и недавно вышедшие монографии Д. С. Сильвестрова (Silvestrov, 2002), В. Е. Бенинга и В. Ю. Королева (Bening and Korolev, 2002)и Л. Б. Клебанова (Klebanov, 2003), содержащие изложение как основ асимптотической теории случайного суммирования, так и описание специальных ее разделов. Не преуменьшая вклад остальных математиков, посвятивших свои работы исследованию тех или иных свойств случайных сумм, упомянем здесь лишь основополагающие работы Г. Роббинса (Robbins, 1948), который в схеме "нарастающих" сумм нашел достаточные условия сходимости распределений нецентрированных случайных сумм к масштабным, а неслучайно центрированных случайных сумм – к сдвиговым смесям нормальных законов; Р. Л. Добрушина (Добрушин, 1955), обобщившего результаты Роббинса на произвольные случайно индексированные случайные последовательности при специальном выборе центрирующих и нормирующих констант; Б. В. Гнеденко, который, во-первых, совместно со своим учеником Х. Фахимом доказал знаменитую теорему переноса, устанавливающую достаточные условия слабой сходимости случайных сумм независимых одинаково распределенных случайных слагаемых в схеме серий (Гнеденко и Фахим, 1969), и, во-вторых, поставил задачу об отыскании необходимых и достаточных условий упомянутой сходимости, первые шаги в решении которой были сделаны его учениками и прежде всего, А. В. Печинкиным (Печинкин, 1973) (для случая сходимости к нормальному закону) и Д. Саасом (Саас, 1972), (Szasz, 1972) для общего случая; В. М. Круглова, в частности, нашедшего необходимые и достаточные условия слабой компактности случайных сумм (Круглов, 1998); В. Ю. Королева, который, во-первых, совместно с В. М. Кругловым нашел окончательное решение задачи Гнеденко–Сааса о необходимых и достаточных условиях слабой сходимости случайных сумм независимых одинаково распределенных случайных слагаемых (Korolev and Kruglov, 1998), и, во-вторых, уточнил и обобщил упоминавшиеся выше результаты Р. Л. Добрушина, указав необходимые и достаточные условия слабой сходимости суперпозиций произвольных незавимых случайных процессов (Korolev, 1996). Последние результаты, в частности, позволили установить необходимые и достаточные условия слабой сходимости процессов риска как с детерминированными, так и со случайными премиями (Бенинг и Королев, 2000a), (Бенинг и Королев, 2000b), (Bening and Korolev, 2002).

Помимо теоретического интереса, задача об асимптотическом поведении распределений случайных сумм имеет еще и большое практическое значение. Дело в том, что на практике часто приходится вычислять или распределения случайных сумм или их квантили. Например, к вычислению распределения специальной случайной суммы сводится задача определения вероятности разорения страховой компании по формуле Поллачека–Хинчина–Беекмана, см., например, (Бенинг и Королев, 2000a). К вычислению квантилей распределения случайной суммы сводится задача об отыскании оптимальных параметров страховой деятельности, например, ставки страховой премии, гарантирующей желаемую вероятность неразорения, или минимально допустимого резерва (см., например, (Бенинг и Королев, 2000a), (Bening and Korolev, 2002)). Точные вычисления в подобных задачах чрезвычайно затруднены, так как, во-первых, для их осуществления необходимо знать точные распределения как индекса (числа слагаемых в сумме), так и слагаемых, и, во-вторых, даже если указанные распределения полностью известны, сами вычисления как правило трудно реализуемы, так как замкнутые, конечные представления для распределений (или их эквивалентных преобразований) случайных сумм возможны лишь в некоторых специальных случаях. Таким образом, весьма актуальной является задача об изучении возможности использования тех или иных аппроксимаций для распределений случайных сумм и их точности.

Среди всех возможных подходов к построению аппроксимаций наиболее обоснованным, пожалуй, является тот, который ориентирован на использование асимптотических аппроксимаций. Под асимптотической аппроксимацией мы будем понимать приближение распределения случайной суммы с помощью предельного (при тех или иных условиях) закона или с помощью некоторых конструкций, которые сближаются в определенном смысле с искомым распределением. К числу таких конструкций относятся, прежде всего, асимптотические разложения и "сопровождающие" смеси – специальные сдвиговые смеси законов, предельных для сумм неслучайного числа тех же слагаемых. Данная диссертация посвящена изучению возможности и точности асимптотических аппроксимаций для распределений случайных сумм.

В частности, в диссертации получены новые оценки точности аппроксимации распределений случайных сумм в той ситуации, когда распределения слагаемых имеют тяжелые хвосты. В последнее время наблюдается устойчивый рост интереса к таким распределениям, см., например, книги (Embrechts and Klüppelberg and Mikosch, 1998), (Klebanov, 2003). Это обусловлено, по-видимому, необходимостью изучения так называемых больших рисков, связанных с катастрофическими событиями. Известно много трактовок понятия "распределения с тяжелыми хвостами". В данной диссертации мы следуем подходу, в рамках которого под распределением с тяжелыми хвостами подразумевается распределение, принадлежащее области притяжения ненормального устойчивого закона. Для такого случая в диссертации найдены оценки точности приближения распределения случайной суммы с помощью а) устойчивого закона, б) предельной сдвиговой смеси устойчивых законов и в) "сопровождающей" дискретной смеси устойчивых законов. Полученные новые оценки обобщают и уточняют аналогичные оценки, найденные ранее для случая, когда слагаемые имеют конечные дисперсии (см., например, (Круглов и Королев, 1990) и дальнейшие ссылки там). Следуя терминологии, предложенной В. М. Золотаревым (Zolotarev, 1997), полученные оценки можно считать "естественными", поскольку они непосредственно связывают критерий и скорость сходимости.

Особое внимание уделено той ситуации, в которой индекс имеет пуассоновское распределение. Такая ситуация традиционно популярна в актуарной математике. Наряду с упомянутыми выше оценками, для случая слагаемых с конечными дисперсиями в диссертации получена оценка точности приближения распределения пуассоновской случайной суммы с помощью асимптотического разложения эджвортовского типа. В отличие от известных результатов об асимптотических разложениях для пуассоновских случайных сумм (см., например, работы Г. Крамера (Cramér, 1955), Фон Хосси и Раппла (Von Chossy and Rappl, 1983), В. Е. Бенинга и В. Ю. Королева (Bening and Korolev, 2002)), сформулированных в терминах о-символики, в диссертации явно выписана оценка остаточного члена. Эти результаты переносят аналогичные результаты Л. В. Осипова (Осипов, 1972) для сумм неслучайного числа независимых случайных величин (также см. (Петров, 1972)) на пуассоновские случайные суммы.

Большое внимание в диссертации уделено изучению асимптотического поведения так называемых обобщенных процессов риска. Эти процессы характеризуются случайностью интенсивности поступления страховых премий и интенсивности страховых выплат. С формальной точки зрения обобщенные процессы риска представляют собой особым образом центрированные случайные суммы. Такие объекты интересны в силу следующего обстоятельства. Традиционно изучается асимптотическое поведение случайных сумм либо при неслучайном центрировании их константами, либо при случайном их центрировании случайными величинами, напрямую связанными с числом слагаемых. Обобщенные же процессы риска занимают как бы промежуточное положение между этими двумя случаями. Они представляют собой случайные суммы, центрированные специальными случайными величинами – условными математическими ожиданиями числа слагаемых относительно накопленной интенсивности поступления страховых требований. Случай, когда слагаемые – страховые требования – имеют конечные дисперсии, хорошо изучен. Соответствующая асимптотическая теория изложена в книгах В. Е. Бенинга и В. Ю. Королева (Bening and Korolev, 2002), (Бенинг и Королев, 2000b). В диссертации изучается асимптотическое поведение обобщенных процессов риска в том случае, когда распределение страховых требований принадлежит области притяжения устойчивого закона. Получены необходимые и достаточные условия сходимости распределений таких обобщенных процессов риска, показано, что в таком случае предельные распределения имеют вид сдвиговых смесей устойчивого закона, притягивающего распределение слагаемых. Найдены оценки точности приближения распределения обобщенных процессов риска с большими выплатами с помощью а) предельной сдвиговой смеси устойчивых законов и б) "сопровождающей" дискретной смеси устойчивых законов. Следует отметить, что в качестве частного случая для ситуации, в которой требования имеют конечные дисперсии, здесь получены оценки, структура которых существенно более естественна, нежели у известных ранее оценок.

В диссертации также рассмотрен пример применения оценок точности асимптотических аппроксимаций для распределений случайных сумм к решению конкретной задачи из области теории риска – задачи оптимизации параметров страховой деятельности. При этом используется неклассический стоимостной подход, в рамках которого оптимизируются (минимизируются) суммарные издержки страховой компании за некоторый фиксированный период времени. Стоимостной подход к задачам страхования тесно связан с задачами управления запасами и разрабатывался, в частности, в работах А. Кофмана (Кофман, 1966), Г. В. Ротарь (Ротарь, 1972a), (Ротарь, 1972b) и Е. В. Булинской (Булинская, 2003). Решение рассматриваемой задачи сводится к отысканию корня некоторого уравнения, связанного с распределением суммарного страхового требования. Поскольку точное решение этого уравнения возможно только при полностью известных распределениях страховых требований и их числа, чего на практике, вообще говоря, быть не может, с помощью оценок точности асимптотических аппроксимаций для распределений случайных сумм в диссертации приводятся двусторонние оценки для решения упомянутого уравнения. Рассмотрены некоторые возможные способы задания издержек. Обсуждается точность полученных оценок.

Коротко остановимся на содержании диссертации.

Глава 1 посвящена оценкам точности асимптотических аппроксимаций для обобщенных пуассоновских распределений, предполагая существование абсолютного момента, не меньшего, чем третий. Эта оценка является обобщением упомянутой выше оценки Петрова (Петров, 1972) на случай пуассоновских случайных сумм.

В главе 2 определены и найдены "естественные" оценки точности аппроксимации распределений случайных сумм к устойчивым законам. Также доказана основная теорема, в качестве следствия из которой получены оценки скорости сходимости распределений случайных сумм, используя доказанную основную теорему, приведены оценки скорости сходимости распределений случайных сумм к устойчивым законам в равномерной метрике при отсутствии условия существования дисперсии, оценки точности приближения распределений случайных сумм "сопровождающими" и предельными сдвиговыми смесями устойчивых законов.

В главах 3 и 4 изучается асимптотическое поведение обобщенных процессов Кокса с большими скачками и обобщенных процессов риска с большими выплатами. Также приводятся "естественные" оценки скорости сходимости распределений упомянутых процессов к предельным сдвиговым смесям устойчивых законов.

В главе 5 выводится уравнение для значения начального капитала, минимизирующего средние издержки страховой компании. В предположении, что поток страховых требований является пуассоновским, на основе нормальной аппроксимации строятся двусторонние оценки для решения упомянутого уравнения. Рассматривается критерий оптимальности, связанный как с возможностью инвестирования капитала в прибыльные проекты, так и с возможностью в необходимых случаях пользоваться кредитами.

Цель работы

Целью данной диссертации является изучение асимптотических аппроксимаций для распределений случайных сумм, у которых распределения слагаемых имеют тяжелые хвосты, обобщенных процессов Кокса, обобщенных процессов риска; а также отыскание двусторонних оценок оптимального значения количества продукта в задаче минимизации издержек при управлении запасами.

Методы исследования

В работе используются классические методы теории вероятностей. В основе полученных в диссертации предельных теорем лежит обобщение и уточнение леммы Р. Л. Добрушина (Добрушин, 1955), доказанное в работе Королева (Korolev, 1996); в основе оценок скорости сходимости лежит Теорема 2.2.1, доказанная во второй главе, которая дает "естественную" оценку скорости сходимости распределений случайных сумм к устойчивым законам.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертации носят теоретический характер. Особенностью представленных в диссертации результатов, отличающей их от предыдущих, является отказ от условия существования второго момента у слагаемых случайных сумм, что позволяет рассматривать существенно более широкие классы случайных величин. Кроме того, полученные двусторонние оценки оптимального количества продукта в задаче управления запасами и оценки начального капитала в задаче минимизации издержек страховой компании могут быть непосредственно применены на практике.

Апробация работы и публикации

По теме диссертации опубликовано 8 печатных работ:

1. Т. Р. Кашаев и В. Ю. Королев. Об оптимальном планировании резерва с приложениями к страхованию. – *Вестник Московского университета, Серия 15, вычислительная математика и кибернетика*, 1999, вып. 2, с. 40-48.

2. Т. Р. Кашаев, В. Ю. Королев и С. Я. Шоргин. Математические методы оценки оптимальных параметров процессов риска. – В сб. *Системы и средства информатики.* Изд-во ИПИ РАН, Москва, 2002, с. 127-141.

3. T. R. Kashaev and V. Yu. Korolev. Natural estimates of the accuracy of approximation of the distributions of random sums by location mixtures of stable laws. – *Journal of Mathematical Sciences*, 2004 (to appear).

4. Т. Р. Кашаев и В. Ю. Королев. Асимптотическое поведение обобщенных процессов риска при возможности больших выплат. – *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 2003 (в печати).

5. Т. Р. Кашаев. Об оптимальном планировании резерва и начальном капитале страховой компании с непостоянными функциями издержек. – *Вестник Московского университета, Серия 15, вычислительная математика и кибернетика*, 2003, (в печати).

6. Т. Р. Кашаев и В. Ю. Королев. On the optimal starting capital and premium rate in insurance. – *XIX International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Vologda, 5-12 September, 1998.* Abstracts of Communications. Vologda State Pedagogical University, Vologda, 1998, p. 26-27.

7. T. R. Kashaev, V. Yu. Korolev and S. Ya. Shorgin. Some optimization problems for the parameters of risk process. – in: *XXII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Varna, Bulgaria, 25-31 May, 2002. Abstracts of Communications*, p. 41-42.

8. T. R. Kashaev, V. Yu. Korolev and S. Ya. Shorgin. Optimization problems for the parameters of risk processes. – in: *Applied Stochastic Models and Information Processes. Memorial seminar dedicated to the 60th birthday of Vladimir Kalashnikov. 8-13 September, 2002, Petrozavodsk. Abstracts of Communications.* p. 80-81.

Обозначения

В работе используется тройная система нумерации формул, определений, утверждений и задач. Первое число указывает на главу, второе – на раздел, третье – на порядковый номер формулы, определения, утверждения, задачи внутри раздела.

Везде в тексте диссертации предполагается, что все рассматриваемые случайные величины определены на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$.

Также используются следующие условные обозначения:

$\mathsf{P}(A)$	–	вероятность события A;
$\mathbf{1}(A)$	–	индикаторная функция события A;
$\mathsf{E}X$	–	математическое ожидание случайной величины X;
$\mathsf{D}X$	–	дисперсия случайной величины X;
$\Longrightarrow$	–	слабая сходимость (сходимость по распределению);
$\xrightarrow{P}$	–	сходимость по вероятности;
$\stackrel{d}{=}$	–	совпадение распределений;
$*$	–	символ свертки функций распределения;
$\mathbb{R}$	–	множество действительных чисел;
x^+	–	функция $\max\{x, 0\}$;
$E_a(x)$	–	вырожденная в точке a функция распределения;
$\Phi(x)$	–	стандартное нормальное распределение;
$\phi(x)$	–	плотность стандартного нормального распределения.

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы, содержащего 61 наименование. Общий объем работы составляет 115 страниц.

Работа выполнена под руководством профессора Виктора Юрьевича Королёва, которому автор выражает искреннюю признательность.

1

Оценки точности асимптотических аппроксимаций для обобщенных пуассоновских распределений

1.1 Оценки точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть N_λ – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с положительным параметром λ.

Предположим, что случайные величины $N_\lambda, X_1, X_2, \ldots$ независимы при каждом λ. Обозначим

$$S_\lambda = X_1 + \ldots + X_{N_\lambda}$$

для определеннности будем мы считать, что $\sum_{j=1}^{0} = 0$. Случайная величина S_λ называется *пуассоновской случайной суммой.*

Из классической теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин известно, что асимптотическое поведение случайной величины S_λ при $\lambda \to \infty$ совпадает с асимптотическим поведением случайной величины $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Это обстоятельство лежит в основе так называемого метода сопровождающих безгранично делимых распределений, предложенного Б.В. Гнеденко (см., например, (Гнеденко и Колмогоров, 1949)) и эффективно применявшегося многими исследователями (см., например, (Круглов, 1984)).

Для того, чтобы сформулировать теорему об асимптотической нормальности пуассоновских случайных сумм, напомним классическую оценку скорости сходимости в центральной предельной теореме, установленную неравенством *Берри-Эссеена* (Феллер, 1984),

$$\sup_x \left| \mathsf{P}\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right| \leq \frac{C_0 L_0^3}{\sqrt{n}},$$

где

$$\mathsf{E}X_1 = a, \qquad \mathsf{D}X_1 = \sigma^2, \qquad L_0^3 = \frac{\mathsf{E}|X_1 - a|^3}{\sigma^3},$$

а C_0 - положительная абсолютная постоянная, которая

$$0.4097 < \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}} \leq C_0 \leq 0.7655,$$

(см., например, (Шиганов, 1982)).

Для пуассоновских случайных сумм верна

Теорема 1.1.1. *Сходимость*

$$\mathsf{P}\left(\frac{S_\lambda - a(\lambda)}{b(\lambda)} < x\right) \Longrightarrow \Phi(x), \qquad (\lambda \to \infty)$$

при некоторых функциях $a(\lambda)$ и $b(\lambda) > 0$ имеет место тогда и только тогда, когда существует $\mathsf{E}X_1^2$. В качестве функций $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ можно взять

$$a(\lambda) \equiv \mathsf{E}S_\lambda \equiv \lambda a, \qquad b(\lambda) \equiv \sqrt{\mathsf{D}S_\lambda} \equiv \sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)},$$

где $a = \mathsf{E}X_1$, $\sigma^2 = \mathsf{D}X_1$ (см., например, (Королев, 1994)).

В работе (Круглов и Королев, 1990) приведена теорема, устанавливающая равномерную оценку скорости сходимости к нормальному закону.

Теорема 1.1.2. *Предположим, что $\mathsf{E}|X_1|^3 < \infty$. Тогда*

$$\sup_x \left| \mathsf{P}\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x\right) - \Phi(x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[C_0 + \inf_{0<q<1}\left(\frac{C_0 L_0^3}{\sqrt{q}} + M(q)\right)\right],$$

где

$$M(q) = \max\left\{\frac{1}{1-q}, \frac{1}{\sqrt{2\pi e q}(1+\sqrt{q})}\right\}. \tag{1.1.1}$$

Вообще, (см. (Круглов и Королев, 1990)) верна следующая обобщающая

Теорема 1.1.3. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathsf{E}X_1 = a$ и $\mathsf{D}X_1 = \sigma^2$. Пусть N – неотрицательная целочисленная случайная величина, независимая от $X_1, X_2, \ldots$. Положим $S_N = X_1 + \ldots + X_N$. Предположим, что $\mathsf{E}|X_1|^3 < \infty$. Тогда для любого $q \in (0,1)$*

$$\sup_x \left| \mathsf{P}\left(\frac{S_N - \mathsf{E}S_N}{\sqrt{\mathsf{D}S_N}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq$$

$$\leq \frac{C_0 L_0^3}{\sqrt{q\mathsf{E}N}} + M(q)\frac{\mathsf{E}|N - \mathsf{E}N|}{\mathsf{E}N} + \sup_x \left| \mathsf{P}\left(\frac{N - \mathsf{E}N}{\sqrt{\mathsf{D}N}} \right) - \Phi(x) \right|,$$

где величина $M(q)$ определена в (1.1.1).

Однако, как только мы замечаем, что мы имеем дело с расстоянием между двумя безгранично делимыми распределениями, мы приходим к неожиданному результату, (см., например (Korolev and Shorgin, 1997), (Michel, 1986)).

Теорема 1.1.4. *Предположим, что $\mathsf{E}|X_1|^3 < \infty$. Тогда*

$$\sup_x \left| \mathsf{P}\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2 + \sigma^2)}} \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{CL_1^3}{\sqrt{\lambda}},$$

где

$$L_1^3 = \frac{\mathsf{E}|X_1|^3}{(a^2 + \sigma^2)^{3/2}},$$

а $C \leq C_0 \leq 0.7655$.

Для полноты картины приведем неравномерные оценки скорости сходимости пуассоновских случайных сумм к нормальному закону.

Теорема 1.1.5. *Предположим, что существует функция $Q(x)$ такая, что*

$$\left| \mathsf{P}\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \right) - \Phi(x) \right| \leq Q(x)\frac{L_0^3}{\sqrt{n}}.$$

Тогда верна оценка

$$\left| \mathsf{P}\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2 + \sigma^2)}} \right) - \Phi(x) \right| \leq Q(x)\frac{L_1^3}{\sqrt{\lambda}}$$

с той же самой функцией $Q(x)$.

Следствие 1.1.1. *Предположим, что* $\mathsf{E}|X_1|^3 < \infty$. *Тогда*

$$\left|\mathsf{P}\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}\right) - \Phi(x)\right| \leq \frac{31.94 L_1^3}{\sqrt{\lambda}(1+|x|^3)}.$$

Это неравенство прямо вытекает из неравенства, доказанного в работе (Нагаев, 1965), с оценкой костанты C, полученной в (Paditz, 1989): $C \leq 31.94$, и Теоремы 1.1.5.

$$\left|\mathsf{P}\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right| \leq \frac{C L_0^3}{\sqrt{n}(1+|x|^3)},$$

где $C \leq 31.94$.

1.2 Оценки точности приближения обобщенных пуассоновских распределений с помощью соответствующих асимптотических разложений

Пусть $Y_1, Y_2 \ldots$ – независимые случайные величины с одной и той же характеристической функцией $v(t)$,

$$\mathsf{E}X_1 = 0, \qquad \mathsf{E}Y_1^2 = \mathsf{D}Y_1 = \sigma^2 > 0, \qquad \mathsf{E}|Y_1|^k \leq \infty$$

при некотором целом $k \geq 3$.

Определение 1.2.1. *Определим функцию* $H_k(x)$ $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ *как*

$$H_k(x) \equiv (-1)^k \frac{\phi^{(k)}(x)}{\phi(x)} \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Функция $H_k(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, очевидно, является полиномом степени k, так как

$$H_{k+1}(x) = xH_k(x) - H_k'(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

$H_k(x)$ назовем *полиномом Чебышева-Эрмита* порядка k.

В книге (Петров, 1972) приводится асимптотическое разложение функции распределения суммы $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$, полученное на основе формального разложения логарифма характеристической функции в степенной ряд

$$\log v(t) = \sum_{\nu=2}^{k} \frac{\gamma_\nu}{\nu!}(it)^\nu + o(t^k) \qquad (t \to \infty),$$

где γ_ν – семиинвариант порядка ν случайной величины Y_1. аналогично раскладывается функция распределения

$$F_n(x) = \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} < x\right),$$

у которой характеристической функцией, очевидно, является функция

$$f_n(t) = \left(v\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

Сделав обратные образования, мы приходим к так называемому *разложению Эджворта* порядка r для сумм независимых случайный величин

$$G_{n,r} = \Phi(x) + \phi(x)\sum_{k=1}^{r-2}\frac{Q_k(x)}{n^{k/2}},$$

где

$$Q_\nu(x) = -\phi(x)\sum H_{\nu+2s-1}(x)\prod_{m=1}^{\nu}\frac{1}{k_m!}\left(\frac{\gamma_{m+2}}{(m+2)!\sigma^{m+2}}\right)^{k_m}, \qquad (1.2.1)$$

где суммирование производится по всем целочисленным неотрицательным решениям $(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ уравнения

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + \nu k_\nu = \nu$$

и $s = k_1 + \ldots + k_\nu$, а $H_k(x)$ – полином Чебышева-Эрмита порядка k.

Аналогично этому разложению распределения суммы случайных величин мы получаем асимптотическое разложение для обобщенных пуассоновских распределений. Пусть $X_1, X_2 \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с одинаковой характеристической функцией $v(t)$, у которых

$$\mathsf{E}X_1 = 0, \qquad \mathsf{E}X_1^2 = \mathsf{D}X_1 = \sigma^2 > 0, \qquad \mathsf{E}|X_1|^k \leq \infty$$

при некотором целом $k \geq 3$. Пусть N_λ – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ. Предположим, что при каждом $\lambda > 0$ случайные величины $N_\lambda, X_1, X_2 \ldots$ независимы. Обозначим через

$$S_\lambda = X_1 + \ldots + X_{N_\lambda}$$

пуассоновскую случайную сумму. Так же разложим в степенной ряд функцию распределения пуассоновских случайных сумм

$$F_\lambda(x) = \mathsf{P}\left(\frac{S_\lambda}{\sigma\sqrt{\lambda}} < x\right)$$

с характеристической функцией

$$f_\lambda(t) = \exp\left\{\lambda\left(v\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\lambda}}\right) - 1\right)\right\}.$$

Сделав обратные преобразования, мы так же приходим к *разложению Эджворта* порядка r для пуассоновских случайных сумм

$$G_{\lambda,r} = \Phi(x) + \phi(x)\sum_{k=1}^{r-2}\frac{Q_k(x)}{\lambda^{k/2}},$$

где $Q_k(x)$ такое же, как и в (1.2.1), но с заменой семиинварианта поряка k на момент порядка k.

Определение 1.2.2. *Будем говорить, что случайная величина X_1 удовлетворяет условию Краме́ра (C), если*

$$\limsup_{|t|\to\infty}|f(t)| < 1.$$

В работе (Бенинг и Королев, 2000a) доказан следующий результат для случайных величин у которых $\mathsf{E}X_1 = a$, $\mathsf{D}X_1 = \sigma^2$.

Теорема 1.2.1. *Пусть $r = 3$ и распределение случайной величины X_1 не является решетчатым или пусть $r > 3$ и распределение случайной величины X_1 удовлетворяет условию Краме́ра (C). Тогда*

$$\sup_x\left|\mathsf{P}\left(\frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x\right) - G_{\lambda,r}(x)\right| = o(\lambda^{-r/2+1}) \quad (\lambda \to \infty).$$

Нашей следующей задачей будет уточнение значения символа $o(\lambda^{-r/2+2})$ в Теореме 1.2.1. Для этого мы используем результат, полученный в (Петров, 1972). Пусть $Y_1, Y_2, \ldots$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с общей функцией распределения $V(x)$,

$$\mathsf{E}Y_1 = 0, \quad \mathsf{E}Y_1^2 = \mathsf{D}Y_1 = \sigma^2 > 0.$$

Обозначим

$$v(t) = \mathsf{E}e^{itY_1}, \quad F_n(x) = \mathsf{P}\Big(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} Y_j < x\Big), \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

В (Петров, 1972), главе VI.3, доказан следующий результат.

Теорема 1.2.2. *Если $\mathsf{E}|Y_1|^k < \infty$ для некоторого целого $k \geq 3$, тогда для всех $x \in \mathbb{R}$ и $n \geq 1$ мы имеем*

$$\begin{aligned}\Big|F_n(x) - G_{n,k}\Big| \leq \\ \leq C(k)\Big\{\frac{1}{\sigma^k n^{(k-2)/2}(1+|x|)^k}\int\limits_{|y|\geq\sigma\sqrt{n}(1+|x|)} |y|^k dV(y) + \\ + \frac{1}{\sigma^{k+1} n^{(k-1)/2}(1+|x|)^{k+1}}\int\limits_{|y|<\sigma\sqrt{n}(1+|x|)} |y|^{k+1} dV(y) + \\ + \left(\sup_{|t|\geq\delta}|v(t)| + \frac{1}{2n}\right)^n \frac{n^{k(k+1)/2}}{(1+|x|)^{k+1}}\Big\},\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

где $C(k)$ – положительная постоянная, зависящая только от k и

$$\delta = \frac{\sigma^2}{12\mathsf{E}|Y_1|^3}.$$

Как несложно видеть, если Y_1 удовлетворяет условию Крамéра , то

$$\sup_{|t|\geq\delta}|v(t)| < 1$$

для любого $\delta > 0$. Следовательно, последнее слагаемое в правой части неравенства (1.2.2) убывает быстрее, чем n^{-p} для любого $p > 0$.

В этой главе $C(k)$ будет обозначать положительную постоянную, зависящую только от k, не обязательно одну и ту же в различных формулах или даже в различных частях одного и того же неравенства.

Используя идеи и методы доказательва Теоремы 1.2.2 мы можем получить аналогичный результат для пуассоновских сумм.

Теорема 1.2.3. *Предположим, что*

$$\mathsf{E}X_1 = 0, \qquad \mathsf{E}X_1^2 = \sigma^2, \qquad \mathsf{E}|X_1|^k < \infty$$

для некоторого целого $k \geq 3$. *Тогда для любого* $\lambda > 0$ *и любого* $x \in \mathbb{R}$ *мы имеем*

$$|F_\lambda(x) - G_{\lambda,k}| \leq$$

$$\leq C(k)\Bigg\{\sigma^{-k}\lambda^{-(k-2)/2}(1+|x|)^{-k} \int\limits_{|y|\geq\sigma\sqrt{\lambda}(1+|x|)} |y|^k dV(y) +$$

$$+\sigma^{-k-1}\lambda^{-(k-1)/2}(1+|x|)^{-k-1} \int\limits_{|y|<\sigma\sqrt{\lambda}(1+|x|)} |y|^{k+1} dV(y) +$$

$$+\left(\sup_{|t|\geq\delta}|v(t)| + \frac{1}{2\lambda}\right)^\lambda \frac{\lambda^{k(k+1)/2}}{(1+|x|)^{k+1}}\Bigg\}, \tag{1.2.3}$$

где $C(k)$ *– положительная постоянная, зависящая только от* k *и*

$$\delta = \frac{\sigma^2}{12\mathsf{E}|X_1|^3}.$$

Доказательство. Обозначим

$$V(x) = \mathsf{P}(X_1 < x), \qquad v(t) = \mathsf{E}e^{itX_1},$$

$$v_\lambda(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_\lambda(x) = \exp\left\{\lambda\left(v\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\lambda}}\right) - 1\right)\right\},$$

$$Y_\lambda = \begin{cases} X, & \text{если } \ |X| < \sigma\sqrt{\lambda} \\ 0, & \text{если } \ |X| \geq \sigma\sqrt{\lambda} \end{cases},$$

$$Z_\lambda = X - Y_\lambda, \quad V_\lambda(x) = \mathsf{P}(Y_\lambda < x), \quad \sigma_\lambda^2 = \mathsf{D}Y_\lambda,$$

$$W_\lambda(x) = \mathsf{P}(Y_\lambda - \mathsf{E}Y_\lambda < x), \qquad w_\lambda(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dW_\lambda(x),$$

$$G_\lambda(x) = \mathsf{E}W_\lambda^{*N_\lambda}(x\sigma_\lambda\sqrt{\lambda}),$$

$$g_\lambda(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dG_\lambda(x) = \exp\left\{\lambda\left(w_\lambda\left(\frac{t}{\sigma_\lambda\sqrt{\lambda}}\right) - 1\right)\right\},$$

$$p_\lambda = \frac{\sigma}{\sigma_\lambda}, \qquad q_\lambda = -\frac{\mathsf{E}Y_\lambda}{\sigma_\lambda}\sqrt{\lambda},$$

$$U_k(x) = \Phi(x) + \sum_{\nu=1}^{k-2} \frac{Q_\nu(x)}{\lambda^{\nu/2}},$$

$$U_{k,\lambda} = \Phi(x) + \sum_{\nu=1}^{k-2} \frac{Q_{\nu,\lambda}(x)}{\lambda^{\nu/2}},$$

где

$$Q_{\nu,\lambda}(x) = -\phi(x)\sum H_{\nu+2s-1}\prod_{m=1}^{\nu}\frac{1}{k_m!}\left(\frac{\alpha_{m+2,\lambda}}{(m+2)!\sigma_\lambda^{m+2}}\right)^{k_m},$$

где $\alpha_{k,\lambda} = \mathsf{E}(Y_\lambda - \mathsf{E}Y_\lambda)^k$.

Так как

$$\mathsf{E}V_\lambda^{*N_\lambda}(x\sigma\sqrt{\lambda}) = \mathsf{E}W_\lambda^{*N_\lambda}(x\sigma\sqrt{\lambda} - \lambda\mathsf{E}Y_\lambda) = G_\lambda(p_\lambda x + q_\lambda),$$

то

$$\begin{aligned} |F_\lambda(x) - U_k(x)| \ &\le\ |\mathsf{E}V^{*N_\lambda}(x\sigma\sqrt{\lambda}) - \mathsf{E}V_\lambda^{*N_\lambda}(x\sigma\sqrt{\lambda})| + \\ &+ |G_\lambda(p_\lambda x + q_\lambda) - U_{k+1,\lambda}(p_\lambda x + q_\lambda)| + \\ &+ |U_{k+1,\lambda}(p_\lambda x + q_\lambda) - U_k(x)| \ \equiv\ I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

В Теореме 1.2.2 рассматривалось представление (1.2.4), но с заменой λ на n. Для слагаемых I_2 и I_3 можно доказать неравенства

$$I_2 \ \le\ C(k)\left(\sup_{|t|\ge\delta}|v(t)| + \frac{1}{2\lambda}\right)^{\lambda}\lambda^{k(k+1)/2}(1+|x|)^{-k-1},$$

$$I_3 \ \le\ \frac{C(k)e^{-x^2/8}}{\sigma^k\lambda^{(k-2)/2}}\left\{\int\limits_{|y|\ge\sigma\sqrt{\lambda}(1+|x|)}|y|^k dV(y) + \frac{1}{\sigma\sqrt{\lambda}}\int\limits_{|y|<\sigma\sqrt{\lambda}(1+|x|)}|y|^{k+1}dV(y)\right\}$$

по аналогии с доказательством Теоремы 1.2.2. Поэтому, проведя аналогичные рассуждения для оценки I_1, мы докажем теорему. Верны следующие леммы.

Лемма 1.2.1. *Пусть $\mathsf{E}X = 0$, $0 < \mathsf{E}X^2 = \sigma^2 < \infty$. Тогда для любых целых положительных m, n и любом λ справедливо неравенство*

$$\left|V_\lambda^{*n}(x\sigma\sqrt{\lambda}) - \Phi(x)\right| \le \frac{C(m)}{(1+|x|)^m}\sum_{k=0}^{m+1}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{\lambda^k}.$$

Доказательство. Известно неравенство для функций распределений

$$(1+|x|^m)\left|V_\lambda^{*n}(x\sigma\sqrt{\lambda})-\Phi(x)\right|\le C(m)\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|y|^m)dV_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda}).$$

Поэтому лемма будет доказана, если мы покажем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|y|^m dV_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda})\le C(m)\sum_{k=0}^{m+1}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{\lambda^k}. \tag{1.2.5}$$

Мы имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}y^2 dV_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda})=\frac{1}{\sigma^2\lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^2 dV_\lambda^{*n}(z)=\frac{n}{\sigma^2\lambda}\mathsf{E}Y_\lambda^2+\frac{n(n-1)}{\sigma^2\lambda}(\mathsf{E}Y_\lambda)^2.$$

Пусть $Z_\lambda=X-Y_\lambda$. Поскольку $\mathsf{E}Y_\lambda+\mathsf{E}Z_\lambda=0$, то

$$|\mathsf{E}Y_\lambda|\le\frac{\mathsf{E}Z_\lambda^2}{\sigma\sqrt{\lambda}}\le\frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}}. \tag{1.2.6}$$

Отсюда следует, что неравенство (1.2.6) выполнено для $m=2$ и тем самым для $m=1$. Действительно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|y|dV_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda})\le\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+y^2)dV_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda})=1+\frac{n}{\lambda}+\frac{n(n-1)}{\lambda^2}.$$

Предположим, что (1.2.5) имеет место для данного $m\ge 2$ и докажем, что оно выполнено при переходе m на $m+1$. Мы можем считать, что $k\ge 2$, так как для $k=1$ неравенство (1.2.5) справедливо в силу соотношений

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|y|^m dV_\lambda(y\sigma\sqrt{\lambda})=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\lambda}}\right)^m\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^m dV_\lambda(x)=$$

$$=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\lambda}}\right)^m\int\limits_{|x|<\sigma\sqrt{\lambda}}|x|^m dV_\lambda(x)\le\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\lambda}}\right)^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2 dV_\lambda(x)\le\frac{1}{\lambda}. \tag{1.2.7}$$

Положим

$$I_{m,n}=\int\limits_{0}^{\infty}x^m dV_\lambda^{*n}(x\sigma\sqrt{\lambda}),\qquad J_{m,n}=\int\limits_{-\infty}^{0}x^m dV_\lambda^{*n}(x\sigma\sqrt{\lambda}).$$

Имеем

$$I_{m+1,n}=\int\ldots\int\limits_{x_1+\ldots+x_n>0}(x_1+\ldots+x_n)^{m+1}dV_\lambda(x_1\sigma\sqrt{\lambda})\ldots dV_\lambda(x_n\sigma\sqrt{\lambda})=$$

$$=n\int\ldots\int\limits_{x_1+\ldots+x_n>0}(x_1+\ldots+x_n)^{m}x_n dV_\lambda(x_1\sigma\sqrt{\lambda})\ldots dV_\lambda(x_n\sigma\sqrt{\lambda})=$$

$$=n\sum_{j=0}^{m}\frac{m!}{j!(m-j)!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_n^{j+1}\int\limits_{-x_n}^{\infty}x^{m-j}dV_\lambda^{*(n-1)}(x\sigma\sqrt{\lambda})dV_\lambda(x_n\sigma\sqrt{\lambda}).$$

С помощью неравенств (1.2.6), (1.2.7) и интегрирования по частям находим, что

$$\left|n\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_n\int\limits_{-x_n}^{\infty}x^m dV_\lambda^{*(n-1)}(x\sigma\sqrt{\lambda})dV_\lambda(x\sigma\sqrt{\lambda})\right|=$$

$$=\left|n\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_n\left\{\int\limits_{0}^{\infty}x^m dV_\lambda^{*(n-1)}(x\sigma\sqrt{\lambda})+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{-x_n}^{0}x^m dV_\lambda^{*(n-1)}(x\sigma\sqrt{\lambda})\right\}dV_\lambda(x_n\sigma\sqrt{\lambda})\right|\le$$

$$\le n\frac{|\mathsf{E}Y_\lambda|}{\sigma\sqrt{\lambda}}I_{m,n-1}+n\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x_n|^{m+1}dV_\lambda(x_n\sigma\sqrt{\lambda})+$$

$$+nm\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x_n|\cdot\left|\int\limits_{-x_n}^{0}V_\lambda^{*(n-1)}(x\sigma\sqrt{\lambda})x^{m-1}dx\right|dV_\lambda(x_n\sigma\sqrt{\lambda})\le$$

$$\le\frac{n}{\lambda}I_{m,n-1}+2n\frac{\mathsf{E}|Y_\lambda|^{m+1}}{(\sigma\sqrt{\lambda})^{m+1}}\le\frac{n}{\lambda}(2+I_{m,n-1}).$$

Если $1\le j\le m$, то

$$\left|n\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_n^{j+1}\int\limits_{-x_n}^{\infty}x^{m-j}dV_\lambda^{*(n-1)}(x_n\sigma\sqrt{\lambda})dV_\lambda(x_n\sigma\sqrt{\lambda})\right|\le$$

$$\le n\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x_n|^{j+1}dV_\lambda(x_n\sigma\sqrt{\lambda})\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^{m-j}dV_\lambda^{*(n-1)}(x\sigma\sqrt{\lambda})\le\frac{n}{\lambda}I_{m-j,n-1}.$$

Имеем

$$I_{m+1,n+1}\le\frac{n}{\lambda}\left(2+\sum_{j=0}^{m}\frac{m!}{j!(m-j)!}I_{m-j,n}\right).$$

Аналогичные рассуждения можно провести для $J_{m,n}$. Лемма доказана.

Замечание 1.2.1. Поскольку для любого целого $k \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{(n-k)!\lambda^k} = 1,$$

то

$$|\mathsf{E}V_\lambda^{*N_\lambda}(x\sigma\sqrt{\lambda}) - \Phi(x)| \leq \frac{C(m)(m+2)}{(1+|x|)^m}.$$

Лемма 1.2.2. *Пусть*

$$\mathsf{E}X = 0, \qquad 0 < \mathsf{E}X^2 = \sigma^2 < \infty, \qquad V(x) = \mathsf{P}(X < x).$$

Пусть Y_λ *определена так же, как и в Лемме 1.2.1,* $V_\lambda = \mathsf{P}(Y_\lambda < x)$,

$$Y_{\lambda,x} = \begin{cases} X, & \text{если} \quad |X| < \sigma\sqrt{\lambda}(1+|x|), \\ 0, & \text{если} \quad |X| \geq \sigma\sqrt{\lambda}(1+|x|), \end{cases}$$

$Z_{\lambda,x} = X - Y_{\lambda,x}$, N_λ *– пуассоновская случайная величина с параметром* λ*, независимая от* X, Y_λ, $Y_{\lambda,x}, Z_{\lambda,x}$ *при каждом* λ*. Если* $\mathsf{E}|X|^k < \infty$*, то для некоторого целого* $k \geq 2$ *и положительных* λ

$$\left|\mathsf{E}V^{*N_\lambda}(x\sigma\sqrt{\lambda}) - \mathsf{E}V_\lambda^{*N_\lambda}(x\sigma\sqrt{\lambda})\right| \leq$$

$$\leq C(k)\left\{\frac{\mathsf{E}|Z_{\lambda,x}|^k}{\sigma^k\lambda^{(k-2)/2}(1+|x|)^k} + \frac{\mathsf{E}|Y_{\lambda,x}|^{k+1} - \mathsf{E}|Y_\lambda|^{k+1}}{\sigma^{k+1}\lambda^{(k-1)/2}(1+|x|)^{k+1}}\right\} \tag{1.2.8}$$

Доказательство. Левую часть неравенства (1.2.8) можно оценить как

$$\left|\mathsf{E}V^{*N_\lambda}(x\sigma\sqrt{\lambda}) - \mathsf{E}V_\lambda^{*N_\lambda}(x\sigma\sqrt{\lambda})\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\left|V^{*n}(x\sigma\sqrt{\lambda}) - V_\lambda^{*n}(x\sigma\sqrt{\lambda})\right|.$$

Положим

$$a_\lambda = \mathsf{P}(\sigma\sqrt{\lambda} \leq |X| < \sigma\sqrt{\lambda}(1+|x|)), \qquad G_\lambda(y) = V_\lambda(y) - a_\lambda D(y),$$

где $D(y) = 0$, если $y \leq 0$ и $D(y) = 1$, если $y > 0$. Очевидно, $a_\lambda \leq 1/\lambda$,

$$G_\lambda^{*n}(y) = V_\lambda^{*n} + \sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!}(-a_\lambda D(y))^{*j} * V_\lambda^{(n-j)}(y).$$

В силу (1.2.5) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |y|^m |d(G_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - V_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda}))| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} a_\lambda^j \int\limits_{-\infty}^{\infty} |y|^m dV_\lambda^{*(n-j)}(y\sigma\sqrt{\lambda}) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} a_\lambda^j C(m) \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(n-j)!}{(n-j-k)!} \frac{1}{\lambda^k}. \tag{1.2.9}$$

Поскольку

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} a_\lambda^j \frac{(n-j)!}{(n-j-k)!} \frac{1}{\lambda^k} = \frac{1}{\lambda^k} \sum_{j=1}^{n-k} \frac{n!}{j!(n-j-k)!} a_\lambda^j =$$

$$= \frac{n!}{(n-k-1)!} \frac{a_\lambda^{k+1}}{\lambda^k} \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{(n-k-1)!}{j!(n-j-k-1)!} a_\lambda^{j-k-1} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k-1)!} \frac{a_\lambda^{k+1}}{\lambda^k} (1+a_\lambda)^{n-k-1},$$

последнее выражение (1.2.9) не больше, чем

$$C(m) \sum_{k=0}^{m+1} \frac{n!}{(n-k-1)!} \frac{a_\lambda^{k+1}}{\lambda^k} \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{n-k-1}.$$

Полагая здесь $m = k+1$, получаем отсюда для $x \leq 0$

$$\left| G_\lambda^{*n}(x\sigma\sqrt{\lambda}) - V_\lambda^{*n}(x\sigma\sqrt{\lambda}) \right| \leq$$

$$\leq (1+|x|)^{-(k+1)} \int\limits_{\infty}^{\infty} (1+|y|)^{k+1} |d(G_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - V_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda}))| \leq$$

$$\leq C(k) a_\lambda (1+|x|)^{-(k+1)} \sum_{k=0}^{m+1} \frac{n!}{(n-k-1)!} \frac{1}{\lambda^k} \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{n-k-1}.$$

Следовательно

$$\left| \mathsf{E} G_\lambda^{*N_\lambda}(x\sigma\sqrt{\lambda}) - \mathsf{E} V_\lambda^{*N_\lambda}(x\sigma\sqrt{\lambda}) \right| \leq$$

$$\leq C(k) a_\lambda (1+|x|)^{-(k+1)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{(n-k-1)!} \frac{1}{\lambda^k} \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{n-k-1} =$$

$$= C(k)a_\lambda(1+|x|)^{-(k+1)}\lambda \sum_{n=k-1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{n-k-1} =$$

$$= C(k)a_\lambda(1+|x|)^{-(k+1)}\lambda \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n}}{n!}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{n} =$$

$$= C(k)a_\lambda(1+|x|)^{-(k+1)}\lambda \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{(1+\lambda)^{n}}{n!} =$$

$$= eC(k)\lambda a_\lambda(1+|x|)^{-(k+1)}. \tag{1.2.10}$$

Вновь используя неравенства (1.2.5) и $a_\lambda \le 1/\lambda$, находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y|^m d\mathsf{E}G_\lambda^{*N_\lambda}(y\sigma\sqrt{\lambda}) \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} |y|^m |d(\mathsf{E}G_\lambda^{*N_\lambda}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - \mathsf{E}V_\lambda^{*N_\lambda}(y\sigma\sqrt{\lambda}))| +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} |y|^m d\mathsf{E}V_\lambda^{*N_\lambda}(y\sigma\sqrt{\lambda}) \le C(m) \tag{1.2.11}$$

Положим $M_\lambda(y) = \mathsf{P}(Y_{\lambda,x} < y)$. Как нетрудно убедиться, если $y_1 < y_2$, то $G_\lambda(y_2) - G_\lambda(y_1) \le M_\lambda(y_2) - M_\lambda(y_1)$. Следовательно, функция $M_\lambda(y) - G_\lambda(y)$ не убывает. Поскольку

$$M_\lambda^{*n} = G_\lambda^{*n} + \sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!}(M_\lambda(y) - G_\lambda(y))^{*j} * G_\lambda^{*(n-j)}(y),$$

разность $M_\lambda^{*n}(y) - G_\lambda^{*n}(y)$ также является неубывающей функцией. Положим еще

$$a_{\lambda,0} = a_\lambda, \qquad a_{\lambda,\nu} = \mathsf{E}|Y_{\lambda,x}|^\nu - \mathsf{E}|Y_\lambda|^\nu. \tag{1.2.12}$$

Ясно, что $a_{\lambda,\nu} \ge 0$ для всех $\nu \ge 0$ и

$$|\mathsf{E}(Y_{\lambda,x}^\nu - \mathsf{E}Y_\lambda^\nu)| \le a_{\lambda,\nu}, \tag{1.2.13}$$

$$a_{\lambda,\nu} \le (\sigma\sqrt{\lambda})^{-s} a_{\lambda,\nu+s} \qquad (\nu, s = 0, 1, \ldots). \tag{1.2.14}$$

Для любой случайной величины X и любых целых неотрицательных j и l имеем $\mathsf{E}|X|^j\mathsf{E}|X|^l \le \mathsf{E}|X|^{j+l}$. Если в качестве X возьмем случайную величину с функцией распределения $\frac{1}{a_\lambda}(M_\lambda(y) - G_\lambda(y))$ и воспользуемся неравенством $a_\lambda \le 1/\lambda$, то получим неравенство

$$a_{\lambda,j} a_{\lambda,l} \le \frac{1}{\lambda} a_{\lambda,j+l} \qquad (j, l = 1, 2, \ldots). \tag{1.2.15}$$

Далее,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d(M_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - G_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda})) = 1 - G_\lambda^{*n}(\infty) = 1 - G_\lambda^{n}(\infty) \le$$

$$\le n(1 - G_\lambda(\infty)) = n a_\lambda \le \frac{1}{\sigma^2}\frac{n}{\lambda} a_{\lambda,2} \le \frac{1}{\sigma^2} n \sigma^{-m-1} \lambda^{-(m+1)/2} a_{\lambda,m+1}, \tag{1.2.16}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d(\mathsf{E} M_\lambda^{*N_\lambda}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - \mathsf{E} G_\lambda^{*N_\lambda}(y\sigma\sqrt{\lambda})) \le \lambda a_\lambda \le$$

$$\le \frac{1}{\sigma^2} a_{\lambda,2} \le \sigma^{-m-1} \lambda^{-(m-1)/2} a_{\lambda,m+1},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 d(M_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - G_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda})) = \frac{1}{\sigma^2\lambda} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 d(M_\lambda^{*n}(t) - G_\lambda^{*n}(t)) \le$$

$$\le \frac{n}{\sigma^2\lambda}\{\mathsf{E} Y_{\lambda,x}^2 - \mathsf{E} Y_\lambda^2 + (n-1)((\mathsf{E} Y_{\lambda,x})^2 - (\mathsf{E} Y_\lambda)^2) +$$
$$+ \mathsf{E} Y_\lambda^2 (1 - G_\lambda^n(\infty)) + (n-1)(\mathsf{E} Y_\lambda)^2 (1 - G_\lambda^n(\infty))\}.$$

Из неравенств (1.2.9), (1.2.13), (1.2.14), (1.2.16),

$$|\mathsf{E} Y_{\lambda,x}| = |\mathsf{E} Z_{\lambda,x}| \le \frac{1}{\sigma\sqrt{\lambda}} \mathsf{E} Z_{\lambda,x}^2 \le \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \tag{1.2.17}$$

и

$$(\mathsf{E} Y_{\lambda,x})^2 - (\mathsf{E} Y_\lambda)^2 = (\mathsf{E} Y_{\lambda,x} + \mathsf{E} Y_\lambda)(\mathsf{E} Y_{\lambda,x} - \mathsf{E} Y_\lambda) \le 2\frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} a_{\lambda,1} \le \frac{2}{\lambda} a_{\lambda,2}$$

заключаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 d(M_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - G_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda})) \le$$

$$\le \frac{1}{\sigma^2}\frac{n}{\lambda}\left(1 + 2\frac{n-1}{\lambda} + \frac{n}{\lambda} + \frac{n(n-1)}{\lambda^2}\right) a_{\lambda,2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 d(\mathsf{E}M_\lambda^{*N_\lambda}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - \mathsf{E}G_\lambda^{*N_\lambda}(y\sigma\sqrt{\lambda})) \le \frac{1}{\sigma^2} a_{\lambda,2}\left(5 + \frac{3}{\lambda}\right) \le \frac{8}{\sigma^2} a_{\lambda,2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y| d(M_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - G_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda})) \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} (1+y^2) d(M_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - G_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda})) \le$$

$$\le \frac{1}{\sigma^2}\frac{n}{\lambda}\left(2 + 2\frac{n-1}{\lambda} + \frac{n}{\lambda} + \frac{n(n-1)}{\lambda^2}\right) a_{\lambda,2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y| d(\mathsf{E}M_\lambda^{*N_\lambda}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - \mathsf{E}G_\lambda^{*N_\lambda}(y\sigma\sqrt{\lambda})) \le \frac{9}{\sigma^2} a_{\lambda,2}.$$

Покажем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y|^m d(\mathsf{E}M_\lambda^{*N_\lambda}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - \mathsf{E}G_\lambda^{*N_\lambda}(y\sigma\sqrt{\lambda})) \le \frac{C(m)}{\sigma^m \lambda^{(m-2)/2}} a_{\lambda,m}. \qquad (1.2.18)$$

Для $m = 2$ это неравенство уже было доказано. Предположим, что оно имеет место для $2, \dots, m$, и покажем, что тогда (1.2.18) выполнено и с заменой m на $m+1$. Для этого достаточно доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y|^m d(M_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - G_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda})) \le \frac{C(m)}{\sigma^m \lambda^{(m-2)/2}} a_{\lambda,m} \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{n}{\lambda}\right)^k$$

для некоторого p. При $n = 1$ и $\lambda \ge 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y|^m d(M_\lambda(y\sigma\sqrt{\lambda}) - G_\lambda(y\sigma\sqrt{\lambda})) = (\sigma\sqrt{\lambda})^{-m} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^m d(M_\lambda(t) - G_\lambda(t)) =$$

$$= (\sigma\sqrt{\lambda})^{-m}(\mathsf{E}|Y_{\lambda,x}|^m - \mathsf{E}|Y_\lambda|^m) = (\sigma\sqrt{\lambda})^{-m} a_{\lambda,m} \le \frac{1}{\sigma^m \lambda^{(m-2)/2}} a_{\lambda,m}.$$

Положим

$$I_{m,n} = \int_{0}^{\infty} |y|^m d(M_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - G_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda})),$$

$$J_{m,n} = \int_{-\infty}^{0} |y|^m d(M_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - G_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda})).$$

Рассуждая так же, как при доказательстве (1.2.5), мы найдем, что

$$\int\limits_0^\infty y^{m+1} dM_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda}) =$$

$$= n\sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!(m-j)!}\int\limits_{-\infty}^\infty y_n^{j+1}\int\limits_{-y_n}^\infty y^{m-j} dM_\lambda^{*(n-1)}(y\sigma\sqrt{\lambda})dM_\lambda(y_n\sigma\sqrt{\lambda}),$$

$$\int\limits_0^\infty y^{m+1} dG_\lambda^{*n}(y\sigma\sqrt{\lambda}) =$$

$$= n\sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!(m-j)!}\int\limits_{-\infty}^\infty y_n^{j+1}\int\limits_{-y_n}^\infty y^{m-j} dG_\lambda^{*(n-1)}(y\sigma\sqrt{\lambda})dG_\lambda(y_n\sigma\sqrt{\lambda}).$$

Следовательно, $I_{m,n} = I'_{m,n} + I''_{m,n}$, где

$$I'_{m,n} = \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!(m-j)!} n\int\limits_{-\infty}^\infty y_n^{j+1}\int\limits_{-y_n}^\infty y^{m-j} d(M_\lambda^{*(n-1)}(y\sigma\sqrt{\lambda}) -$$

$$-G_\lambda^{*(n-1)}(y\sigma\sqrt{\lambda}))dM_\lambda(y_n\sigma\sqrt{\lambda}),$$

$$I''_{m,n} = \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!(m-j)!} n\int\limits_{-\infty}^\infty y_n^{j+1}\int\limits_{-y_n}^\infty y^{m-j} dG_\lambda^{*(n-1)}(y\sigma\sqrt{\lambda}) \times$$

$$\times d(M_\lambda(y_n\sigma\sqrt{\lambda}) - G_\lambda(y_n\sigma\sqrt{\lambda})).$$

Из неравенства (1.2.7) следует, что $\mathsf{E}|Y_\lambda|^m \le \sigma^m\lambda^{(n-2)/2}$ для $m \ge 2$. Поэтому для $j \ge 1$

$$\mathsf{E}|Y_{\lambda,x}|^{j+1} = a_{\lambda,j+1} + \mathsf{E}|Y_\lambda|^{j+1} \le a_{\lambda,j+1} + \sigma^{j+1}\lambda^{(j-1)/2}.$$

j-е слагаемое суммы $I'_{m,n}$ можно с помощью неравенств (1.2.14), (1.2.15) оценить сверху

$$C(m)nI'_{m-j,n-1}(\sigma\sqrt{\lambda})^{-j-1}\mathsf{E}|Y_{\lambda,x}|^{j+1} \le$$

$$\le C(m)nI'_{m-j,n-1}(\sigma\sqrt{\lambda})^{-j-1}(a_{\lambda,j+1} + \sigma^{j+1}\lambda^{(j-1)/2}) \le$$

$$\le C(m)\sigma^{-(m-j)}\lambda^{-(m-j-2)/2}a_{\lambda,m-j}\sum_{k=1}^p \left(\frac{n}{\lambda}\right)^k \left((\sigma\sqrt{\lambda})^{-j-1}na_{\lambda,j+1} + \frac{n}{\lambda}\right) \le$$

$$\le 2\sigma^{-m-1}\lambda^{-(m-1)/2}a_{\lambda,m+1}\sum_{k=1}^p \left(\frac{n}{\lambda}\right)^k.$$

Пользуясь неравенствами (1.2.7), (1.2.12), (1.2.14)-(1.2.17) и

$$\left|\int\limits_{-y_n}^{0} y^m d\left(M_\lambda^{*(n-1)}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - G_\lambda^{*(n-1)}(y\sigma\sqrt{\lambda})\right)\right| \le$$

$$\le (n-1)a_\lambda \left(|y_n|^m + \right.$$

$$\left. +m\left|\int\limits_{-y_n}^{0} y^{m-1}\left(M_\lambda^{*(n-1)}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - G_\lambda^{*(n-1)}(y\sigma\sqrt{\lambda})\right)dy\right|\right) \le$$

$$\le (n-1)a_\lambda 2|y_n|^m,$$

мы получаем следующую оценку сверху для слагаемого суммы $I'_{m,n}$, соответствующего значению $j=0$.

$$\left| n\int\limits_{-\infty}^{\infty} y_n \left\{\int\limits_{0}^{\infty} y^m d(M_\lambda^{*(n-1)}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - G_\lambda^{*(n-1)}(y\sigma\sqrt{\lambda})) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_{-y_n}^{0} y^m d(M_\lambda^{*(n-1)}(y\sigma\sqrt{\lambda}) - G_\lambda^{*(n-1)}(y\sigma\sqrt{\lambda}))\right\} dM_\lambda(y\sigma\sqrt{\lambda})\right| \le$$

$$\le nI'_{m,n-1}\frac{|\mathsf{E}Y_{\lambda,x}|}{\sigma\sqrt{\lambda}} + 2n(n-1)a_\lambda(\sigma\sqrt{\lambda})^{-(m+1)}\mathsf{E}|Y_{\lambda,x}|^{m+1} \le$$

$$\le \frac{n}{\lambda}I'_{m,n-1} + 2n(n-1)(\sigma\sqrt{\lambda})^{-(m+1)}a_\lambda\left(\mathsf{E}|Y_\lambda|^{m+1} + a_{\lambda,m+1}\right). \qquad (1.2.19)$$

Поскольку

$$a_\lambda \mathsf{E}|Y_\lambda|^{m+1} \le (\sigma\sqrt{\lambda})^{-(m+1)}a_{\lambda,m+1}\sigma^{m+1}\lambda^{(m-1)/2} \le \frac{1}{\lambda}a_{\lambda,m+1},$$

то последнее выражение в цепочке неравенств (1.2.19) можно оценить сверху величиной

$$\frac{n}{\lambda}I'_{m,n-1} + 4n(n-1)(\sigma\sqrt{\lambda})^{-(m+1)}\frac{1}{\lambda}a_{\lambda,m+1} \ \le$$

$$\le \ 2\sigma^{-m-1}\lambda^{-(m-1)/2}a_{\lambda,m+1}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{n}{\lambda}\right)^k.$$

В силу (1.2.11), (1.2.14), (1.2.16) такая же оценка справедлива для интеграла $J_{m,n}$. Неравенство (1.2.18) доказано. Поэтому из него следует для $x \le 0$

$$\left|\mathsf{E}M_\lambda^{*N_\lambda}(x\sigma\sqrt{\lambda}) - \mathsf{E}G_\lambda^{*N_\lambda}(x\sigma\sqrt{\lambda})\right| \le C(k)\sigma^{-k-1}\lambda^{-(k-1)/2}a_{\lambda,k+1}(1+|x|)^{-k-1}.$$

Пусть $X^{(1)},\ldots,X^{(n)}$ – независимые случайные величины, имеющие то же распределение, что и X. Пусть $Y^{(1)}_{\lambda,x},\ldots,Y^{(n)}_{\lambda,x}$ – независимые случайные величины, распределенные так же, как и $Y_{\lambda,x}$. Верны неравенства

$$\sup_u\left|\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^n X^{(i)}<u\right)-\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^n Y^{(i)}_{\lambda,x}<u\right)\right|\leq n\mathsf{P}(|X|\geq\sigma\sqrt{\lambda}(1+|x|))\leq$$

$$\leq n\mathsf{P}(|Z_{\lambda,x}|\geq\sigma\sqrt{\lambda}(1+|x|))\leq n\sigma^{-k}\lambda^{-k/2}(1+|x|)^{-k}\mathsf{E}|Z_{\lambda,x}|^k.$$

Поэтому

$$\sup_u\left|\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{N_\lambda} X^{(i)}<u\right)-\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{N_\lambda} Y^{(i)}_{\lambda,x}<u\right)\right|\leq\lambda\sigma^{-k}\lambda^{-k/2}(1+|x|)^{-k}\mathsf{E}|Z_{\lambda,x}|^k.$$

Мы имеем

$$\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{N_\lambda} X^{(i)}<u\right)=\mathsf{E}V^{*N_\lambda}(u),\qquad \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{N_\lambda} Y^{(i)}_{\lambda,x}<u\right)=\mathsf{E}M_\lambda^{*N_\lambda}(u).$$

Поэтому

$$|\mathsf{E}V^{*N_\lambda}(x\sigma\sqrt{\lambda})-\mathsf{E}M_\lambda^{*N_\lambda}(x\sigma\sqrt{\lambda})|\leq\sigma^{-k}\lambda^{-(k-2)/2}(1+|x|)^{-k}\mathsf{E}|Z_{\lambda,x}|^k$$

для любых λ и x. Принимая во внимание полученные оценки (1.2.10) и (1.2.14), мы находим для $x\leq 0$, что

$$\left|\mathsf{E}V^{*N_\lambda}(x\sigma\sqrt{\lambda})-\mathsf{E}V_\lambda^{*N_\lambda}(x\sigma\sqrt{\lambda})\right|\leq$$

$$\leq\sigma^{-k}\lambda^{-(k-2)/2}(1+|x|)^{-k}\mathsf{E}|Z_{\lambda,x}|^k+C(k)\sigma^{-k-1}\lambda^{-(k-1)/2}(1+|x|)^{-k-1}a_{\lambda,k+1}.$$

Применение этого неравенства к случайной величине $-X$ показывает его справедливость для $x>0$. Лемма доказана.

Теорема доказана.

Следствие 1.2.1. *Пусть $\mathsf{E}X_1=a$, $\mathsf{E}|X_1|^{r+1}<\infty$ для некоторого целого $r\geq 3$. Тогда для любого $\lambda>0$ и любого $x\in\mathbb{R}$ мы имеем*

$$(1+|x|)^{r+1}\left|\mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda-a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}}<x\Big)-G_{\lambda,r}(x)\right|\leq$$

$$\leq C(r)\left\{\frac{\mathsf{E}|X_1-a|^{r+1}}{\lambda^{(r-1)/2}(\sigma^2+a^2)^{(r+1)/2}}+\left(\sup_{|t|\geq\delta}|v(t)|+\frac{1}{2\lambda}\right)^{\lambda}\lambda^{r(r+1)/2}\right\},$$

где $C(r)$ – положительная постоянная, зависящая только от r и δ та же, что и в Теореме 1.2.3.

В частности, если $a = 0$ и $r = 3$, мы приходим к оценке

$$(1+|x|)^4 \left| \mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda}{\sigma\sqrt{\lambda}} < x\Big) - \Phi(x) + \frac{\alpha_3}{6\sigma^3\sqrt{\lambda}}(x^2-1)\phi(x) \right| \le$$

$$\le C(3)\Big\{ \frac{\mathsf{E}|X_1|^4}{\lambda\sigma^4} + \left(\sup_{|t|\ge\delta} |v(t| + \frac{1}{2\lambda} \right)^\lambda \lambda^6 \Big\},$$

если $a = 0$ и $r = 4$, то

$$(1+|x|)^5 \left| \mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda}{\sigma\sqrt{\lambda}} < x\Big) - \Phi(x) + \frac{\alpha_3}{6\sigma^3\sqrt{\lambda}}(x^2-1)\phi(x) - \right.$$

$$\left. - \frac{\phi(x)}{\lambda} \left[\frac{\alpha_4}{24\sigma^4}(x^3-3x) - \frac{\alpha_3^2}{72\sigma^6}(x^5 - 10x^3 + 15x) \right] \right| \le$$

$$\le C(4)\Big\{ \frac{\mathsf{E}|X_1|^5}{\lambda^{3/2}\sigma^5} + \left(\sup_{|t|\ge\delta} |v(t| + \frac{1}{2\lambda} \right)^\lambda \lambda^{10} \Big\}.$$

Следствие 1.2.2. *Если случайная величина X_1 удовлетворяет условию Крамéра (C) и $\mathsf{E}|X_1|^{r+1} < \infty$ для некоторого целого $r \ge 3$. Тогда для любого $\lambda > 0$ и любого $x \in \mathbb{R}$ мы имеем*

$$(1+|x|)^{r+1} \sup_x \left| \mathsf{P}\Big(\frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x\Big) - G_{\lambda,r}(x) \right| = o(\lambda^{-r/2+1}) \quad (\lambda \to \infty).$$

2

Естественные оценки точности аппроксимации распределений случайных сумм сдвиговыми смесями устойчивых законов

2.1 Естественные оценки

Будем называть здесь и далее функцию $b(t)$, $t > 0$, *медленно меняющейся* (в бесконечности), если для любого $p > 0$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{b(pt)}{b(t)} = 1.$$

Если существуют вещественные a_n и $b_n > 0$ такие, что распределения нормированных сумм $b_n^{-1}\left(\sum_{j=1}^n X_j - a_n\right)$ независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ слабо сходятся к некоторой функции распределения $G(x)$, то говорят, что общая функция распределения $F(x)$ случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ *притягивается* к $G(x)$. Множество всех функций распределения, притягивающихся к $G(x)$, называется *областью притяжения* функции распределения $G(x)$. Как показано в работе (Tucker, 1968), если функция распределения $F(x)$ принадлежит к области притяжения устойчивого закона $G_\alpha(x)$, то существует медленно меняющаяся функция $b(t)$ такая, что $b_n^{-1}\left(\sum_{j=1}^n X_j - a_n\right) \Longrightarrow Y_\alpha$ с $\mathsf{P}(Y_\alpha < x) = G_\alpha(x)$ при $b_n = b(n)n^{1/\alpha}$.

В данной работе мы будем предполагать, что существуют $\alpha \in (1,2]$, $a \in \mathbb{R}$, медленно меняющаяся функция $b(t)$, $t > 0$, и невырожденная случайная величина Y_α такие, что

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - na}{b(n)n^{1/\alpha}} \implies Y_\alpha \qquad (n \to \infty). \tag{2.1.1}$$

Из классических результатов (Гнеденко и Колмогоров, 1949) при этом вытекает, что случайная величина Y_α имеет устойчивое распределение G_α с параметром α, характеристическая функция которого имеет вид

$$f_{Y_\alpha}(s) \; = \; \exp\{i\gamma s - d|s|^\alpha(1 + \frac{i\beta s}{|s|}\tan\frac{\pi\alpha}{2})\}, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{2.1.2}$$

где $d \geq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \beta \leq 1$. Параметр α называют *характеристическим показателем* устойчивого закона. Понятно, что $|f_{Y_\alpha}(s)| = \exp(-d|s|^\alpha)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t^n f_{Y_\alpha}(t)|dt < \infty \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Следовательно, функция распределения устойчивого закона имеет всюду непрерывную производную любого порядка.

Если $\alpha = 2$, то в представлении (2.1.2) $f_{Y_2}(s)$ – характеристическая функция нормального закона.

Соотношение (2.1.1) означает, что общая функция распределения $F(x)$ случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ принадлежит к области притяжения устойчивого закона $G_\alpha(x)$. При этом, если $\alpha < 2$, то

$$\mathsf{P}(X_1 \geq x) \; = \; 1 - F(x) \; = \; \frac{\delta + o(1)}{x^\alpha} h(x) \qquad (x \to \infty), \tag{2.1.3}$$

где $\delta \in (0, \infty)$ и $h(x)$ – медленно меняющаяся функция (см, например, Теорему 12 разд. IV.3 в книге (Петров, 1987)). Соотношение (2.1.3) означает, что распределение слагаемых $X_1, X_2, \ldots$ имеет "тяжелый" хвост, обеспечивающий значительную вероятность очень больших их значений.

Всюду далее в этой работе плотность, соответствующую функции распределения $G_\alpha(x)$, будем обозначать $p_\alpha(x)$. Предположим, что

$$\sup_x |x| p_\alpha(x) \; \equiv \; C(\alpha) < \infty.$$

Пусть N_n, $n = 1, 2, \ldots$, – целочисленные неотрицательные случайные величины, независимые от последовательности $X_1, X_2, \ldots$. Обозначим

$$S_{N_n} \;=\; X_1 + \ldots + X_{N_n}.$$

В соответствии с условием (2.1.1) мы будем рассматривать асимптотическое поведение случайных величин

$$Z_n \;=\; \frac{S_{N_n} - an}{b(n)n^{1/\alpha}}. \tag{2.1.4}$$

Оказывается, что при таком специальном виде центрирующих и нормирующих функций условия сходимости распределений случайных величин Z_n приобретают довольно простую форму. А именно, в книге (Gnedenko and Korolev, 1996) в терминах процессов риска доказан результат, который в терминах введенных выше случайных сумм S_{N_n} имеет следующий вид.

Теорема 2.1.1. *Предположим, что* $N_n \xrightarrow{P} \infty$ *при* $n \to \infty$, *а слагаемые* $X_1, X_2, \ldots$ *удовлетворяют условию (2.1.1). Случайные величины* Z_n, *определяемые соотношением (2.1.4), сходятся по распределению к некоторой случайной величине* Z,

$$Z_n \;\Longrightarrow\; Z \qquad (n \to \infty) \tag{2.1.5}$$

тогда и только тогда, когда существует случайная величина V *такая, что*

$$Z \;\stackrel{d}{=}\; Y_\alpha + V, \tag{2.1.6}$$

где $\mathsf{P}(Y_\alpha < x) = G_\alpha(x)$, *причем случайные величины* Y_α *и* V *в правой части (2.1.6) независимы, и*

$$\frac{a(N_n - n)}{b(n)n^{1/\alpha}} \;\Longrightarrow\; V \qquad (n \to \infty). \tag{2.1.7}$$

В данной работе мы построим несколько оценок скорости сходимости в Теореме 2.1.1 и ее частных случаях, а также отыскание (в дополнение к асимптотическим аппроксимациям, устанавливаемым Теоремой 2.1.1) некоторых альтернативных аппроксимаций для одномерных распределений случайных сумм, которые можно считать в определенном смысле "сопровождающими".

Мы будем рассматривать оценки скорости сходимости в терминах вероятностных метрик, метризующих слабую сходимость. Одной из таких метрик, как известно (см., например, (Гнеденко и Колмогоров, 1949)), является расстояние Леви.

Определение 2.1.1. *Расстояние (метрика) Леви $L(F_1, F_2)$ между функциями распределения F_1 и F_2 определяется как*

$$L(F_1, F_2) = \inf\{h > 0: \; F_1(x-h) - h \leq F_2(x) \leq F_1(x+h) + h$$

$$\text{для всех } x \in \mathbb{R}\}.$$

Если X_1 и X_2 – случайные величины с функциями распределения F_1 и F_2 соответственно, то мы будем считать, что $L(X_1, X_2) = L(F_1, F_2)$.

Сходимость в метрике Леви эквивалентна сходимости по распределению (см., например, (Гнеденко и Колмогоров, 1949), глава 2, разд. 9).

Определение 2.1.2. *Равномерная метрика $\rho(F_1, F_2)$ между функциями распределения F_1 и F_2 определяется как*

$$\rho(F_1, F_2) \;=\; \sup_x |F_1(x) - F_2(x)|.$$

Равномерное расстояние не метризует слабую сходимость (например, $\Phi(nx) \Longrightarrow E_0(x)$ при $n \to \infty$, в то время как $\rho(\Phi(nx), E_0(x)) \;\equiv\; \frac{1}{2}$). Однако равномерное расстояние можно "сгладить" и получить метрику, метризующую слабую сходимость. Пусть $H(x)$ – некоторая всюду дифференцируемая функция распределения, причем

$$\sup_x H'(x) \;\equiv\; C_H \;< \infty.$$

Пусть F_1 и F_2 – две произвольные функции распределения. "Сглаженное" равномерное расстояние определяется как

$$\rho_H(F_1,\, F_2) \;=\; \sup_x |(F_1 * H)(x) - (F_2 * H)(x)|.$$

В (Rachev, 1991) показано, что метрика ρ_H метризует слабую сходимость.

Заметим, что если ввести обозначения

$$P_n(x) = \mathsf{P}(\frac{\sum_{j=1}^n X_j - na}{b(n)n^{1/\alpha}} < x), \quad Q_n(x) = \mathsf{P}(Z_n < x), \quad Q(x) = \mathsf{P}(Z < x),$$

$$R_n(x) = \mathsf{P}(\frac{a(N_n - n)}{b(n)n^{1/\alpha}} < x), \quad R(x) = \mathsf{P}(V < x),$$

то условия (2.1.1), (2.1.5) и (2.1.7), фигурирующие в Теореме 2.1.1, можно записать соответственно в виде

$$\psi_1(P_n,\, G_\alpha) \Longrightarrow 0, \tag{2.1.1$'$}$$

$$\psi_2(Q_n,\, Q) \Longrightarrow 0, \tag{2.1.5$'$}$$

$$\psi_3(R_n,\, R) \Longrightarrow 0, \tag{2.1.7$'$}$$

где каждая из метрик ψ_k, $k = 1, 2, 3$, метризует слабую сходимость. В качестве ψ_k может фигурировать, например, метрика Леви L или "сглаженная" равномерная метрика ρ_H. При этом соотношение вида

$$\psi_2(Q_n,\, Q) \ \leq \ \mathcal{W}(\psi_1(P_n,\, G_\alpha),\, \psi_3(R_n,\, R)), \tag{2.1.7$''$}$$

где $\mathcal{W}(x, y)$ – монотонная непрерывная неотрицательная функция своих аргументов такая, что $\mathcal{W}(0, 0) = 0$, разумно считать *естественной* оценкой скорости сходимости в Теореме 2.1.1. По терминологии, предложенной В. М. Золотаревым (см., например, (Zolotarev, 1997)), оценка скорости сходимости называется естественной, если она связывает скорость сходимости в предельной теореме с критерием (то есть необходимым и достаточным условием) этой сходимости. Такому определению удовлетворяет соотношение (2.1.7$''$).

Отыскание таких соотношений и является основной целью данной работы. При этом наряду с естественными оценками, мы приведем и несколько оценок в терминах традиционно рассматриваемой в подобных задачах равномерной метрики ρ. Мы также укажем (в дополнение к асимптотическим аппроксимациям, устанавливаемым Теоремой 2.1.1) некоторые альтернативные аппроксимации для одномерных распределений случайных сумм, которые можно считать в определенном смысле "сопровождающими", и обсудим их точность.

2.2 Естественные оценки скорости сходимости распределений случайных сумм к устойчивым законам

Предположим, что существуют вещественные числа a_n и $b_n > 0$ такие, что
$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \implies Y_\alpha, \tag{2.2.1}$$
где $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

Предположим, что известна оценка скорости сходимости в (2.2.1). А именно, пусть $H(x)$ – некоторая функция распределения, удовлетворяющая условиям, фигурирующим в определении "сглаженной" равномерной метрики ρ_H. Обозначим
$$\Delta_n \equiv \sup_x \left| \mathsf{P}\left(\frac{S_n - a_n}{b_n} < x\right) * H(x) - (G_\alpha * H)(x) \right|.$$
Пусть N_θ – натуральнозначная случайная величина, распределение которой зависит от некоторого параметра $\theta \in (0, \infty)$. Предположим, что при каждом $\theta \in (0, \infty)$ случайная величина N_θ независима от последовательности $X_1, X_2, \ldots$. Обозначим
$$S_{N_\theta} = X_1 + \ldots + X_{N_\theta}.$$
Предположим, что существуют функции $c(\theta)$ и $d(\theta)$ такие, что
$$\frac{S_{N_\theta} - c(\theta)}{d(\theta)} \implies Y_\alpha \qquad (\theta \to \infty). \tag{2.2.1$'$}$$
Нашей ближайшей целью будет отыскание верхней оценки величины
$$\Delta(\theta) \equiv \sup_x \left| \mathsf{P}\left(\frac{S_{N_\theta} - c(\theta)}{d(\theta)} < x\right) * H(x) - (G_\alpha * H)(x) \right|.$$

Теорема 2.2.1. *Для любых $\theta \in (0, \infty)$ и $\epsilon \in (0, 1)$ справедлива оценка*
$$\Delta(\theta) \le \mathsf{E}[\Delta_{N_\theta} \mathbf{1}(N_\theta \in \mathcal{N}_\epsilon)] + \max\left\{\frac{1}{\epsilon}, \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\right\} \mathsf{E} \min\left\{\epsilon, \left|\frac{b_{N_\theta}}{d(\theta)} - 1\right|\right\} +$$
$$+ \min\left\{(C_H + 1) L(F_\theta, E_0),\ C_H \mathsf{E}\left|\frac{a_{N_\theta} - c(\theta)}{d(\theta)}\right|\right\},$$

где

$$\mathcal{N}_\epsilon \;=\; \{n : |b_n - d(\theta)| \le \epsilon d(\theta)\}, \qquad F_\theta(x) \;=\; \mathsf{P}\left(\frac{a_{N_\theta} - c(\theta)}{d(\theta)} < x\right).$$

Доказательство. Предположим, что ξ – случайная величина с функцией распределения H, независимая от остальных случайных величин, фигурирующих в выкладках. Существование такой случайной величины не является ограничительным условием и предполагается лишь для упрощения записи. По формуле полной вероятности имеем

$$\Delta(\theta) \;\le\; \sum_{n\in\mathcal{N}_\epsilon} \mathsf{P}(N_\theta = n)\Delta_n +$$

$$+\sum_{n\in\mathcal{N}_\epsilon} \mathsf{P}(N_\theta = n)|\mathsf{E}G_\alpha((x-\xi)\frac{d(\theta)}{b_n} - \frac{a_n - c(\theta)}{b_n}) - \mathsf{E}G_\alpha(x - \xi - \frac{a_n - c(\theta)}{d(\theta)})|+$$

$$+\Big|\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(N_\theta = n)\mathsf{E}G_\alpha(x - \xi - \frac{a_n - c(\theta)}{d(\theta)}) - (G_\alpha * H)(x)\Big|+$$

$$+\sum_{n\notin\mathcal{N}_\epsilon} \mathsf{P}(N_\theta = n)|\mathsf{P}(\frac{S_n - c(\theta)}{d(\theta)} < x) - \mathsf{E}G_\alpha(x - \xi - \frac{a_n - c(\theta)}{d(\theta)})| \equiv$$

$$\equiv\; I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \tag{2.2.2}$$

Оценим величины I_1, I_2, I_3, I_4.

Очевидно, что

$$I_1 \;=\; \mathsf{E}[\Delta_{N_\theta}\mathbf{1}(N_\theta \in \mathcal{N}_\epsilon)]. \tag{2.2.3}$$

Рассмотрим I_2. Для каждого $n \in \mathcal{N}_\epsilon$ и любого $y \in \mathbb{R}$ при некотором $\delta_n \in [0,1]$ по формуле Лагранжа мы имеем

$$|G_\alpha((x-y)\frac{d(\theta)}{b_n} - \frac{a_n - c(\theta)}{b_n}) - G_\alpha(x - y - \frac{a_n - c(\theta)}{d(\theta)})| =$$

$$= |G_\alpha((x-y)\frac{d(\theta)}{b_n} - \frac{a_n - c(\theta)}{b_n}) - G_\alpha(((x-y)\frac{d(\theta)}{b_n} - \frac{a_n - c(\theta)}{b_n}) \cdot \frac{b_n}{d(\theta)})| =$$

$$= |((x-y)\frac{d(\theta)}{b_n} - \frac{a_n - c(\theta)}{b_n})(1 - \frac{b_n}{d(\theta)})p_\alpha(((x-y)\frac{d(\theta)}{b_n} - \frac{a_n - c(\theta)}{b_n}) \cdot \delta_n +$$

$$+((x-y)\frac{d(\theta)}{b_n} - \frac{a_n - c(\theta)}{b_n}) \cdot \frac{b_n}{d(\theta)} \cdot (1 - \delta_n))| =$$

$$= |((x-y)\frac{d(\theta)}{b_n} - \frac{a_n - c(\theta)}{b_n})(1 - \frac{b_n}{d(\theta)})\times$$

$$\times p_\alpha(((x-y)\frac{d(\theta)}{b_n} - \frac{a_n - c(\theta)}{b_n})[\delta_n(1 - \frac{b_n}{d(\theta)}) + \frac{b_n}{d(\theta)}])| \leq$$

$$\leq |1 - \frac{b_n}{d(\theta)}|[\delta_n(1 - \frac{b_n}{d(\theta)}) + \frac{b_n}{d(\theta)}]^{-1} \cdot \sup_x |x| p_\alpha(x) \leq$$

$$\leq \frac{C(\alpha)|1 - \frac{b_n}{d(\theta)}|}{\min\limits_{n\in\mathcal{N}_\epsilon} \min\limits_{\delta\in[0,1]} [\delta(1 - \frac{b_n}{d(\theta)}) + \frac{b_n}{d(\theta)}]} = \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}|1 - \frac{b_n}{d(\theta)}|.$$

Поэтому

$$I_2 \ \leq \ \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\cdot \mathsf{E}[|1 - \frac{b_{N_\theta}}{d(\theta)}|\mathbf{1}(N_\theta \in \mathcal{N}_\epsilon)] = \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\cdot \mathsf{E}[|1 - \frac{b_{N_\theta}}{d(\theta)}|\mathbf{1}(|1 - \frac{b_{N_\theta}}{d(\theta)}| \leq \epsilon)]. \tag{2.2.4}$$

Теперь рассмотрим I_3 и приведем две оценки этой величины.

Во-первых, заметим, что

$$I_3 \ \leq \ \sup_y |(G_\alpha * H)(y) - H(y) * \mathsf{E}G_\alpha(y - \frac{a_{N_\theta} - c(\theta)}{d(\theta)})| \ =$$

$$= \ \sup_y |(H * G_\alpha * E_0)(y) - (H * G_\alpha * F_\theta)(y)|. \tag{2.2.5}$$

Используя хорошо известные свойства равномерной метрики и метрики Леви

$$\sup_x |F(x) - H(x)| \ \leq \ (1 + \sup_x F'(x))L(F, H)$$

и

$$L(F_1 * H_1,\ F_2 * H_2) \ \leq \ L(F_1,\ F_2) + L(H_12,\ H_2),$$

имеющие место при любых функциях распределения F, F_1, F_2, H, H_1, H_2 (см., например, (Zolotarev, 1997)) с учетом того что

$$\sup_x \ (H * F_\theta)'(x) \ \leq \ \sup_x \ H'(x) \ = \ C_H,$$

продолжая (2.2.5), мы получим

$$I_3 \ \leq \ \rho(H * G_\alpha * E_0,\ H * G_\alpha * F_\theta) \ \leq \ (1 + C_H)L(E_0,\ F_\theta). \tag{2.2.6}$$

Во-вторых, обозначим $h_\alpha(x) = (H' * p_\alpha)(x)$. Легко видеть, что

$$\sup_x h_\alpha(x) \ \le \ C_H.$$

Используя формулу Лагранжа, мы получим

$$I_3 \ \le \ \sup_y \Big| \int\limits_{-\infty}^{\infty} [(H * G_\alpha)(y) - (H * G_\alpha)(y - x)] \, dF_\theta(x) \Big| \le$$

$$\le \sup_x h_\alpha(x) \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| \, dF_\theta(x) = C_H \mathsf{E} | \frac{a_{N_\theta} - c(\theta)}{d(\theta)} |. \qquad (2.2.7)$$

Наконец, рассмотрим I_4. Имеем

$$I_4 \ \le \ \mathsf{P}(N_\theta \notin \mathcal{N}_\epsilon) = \mathsf{P}(| \frac{b_{N_\theta}}{d(\theta)} - 1 | > \epsilon) = \mathsf{E}\mathbf{1}(| \frac{b_{N_\theta}}{d(\theta)} - 1 | > \epsilon). \qquad (2.2.8)$$

Объединяя (2.2.4) и (2.2.8), мы получаем

$$I_2 + I_4 \ \le \ \frac{C(\alpha)}{1 - \epsilon} \cdot \mathsf{E}[|1 - \frac{b_{N_\theta}}{d(\theta)}| \mathbf{1}(|1 - \frac{b_{N_\theta}}{d(\theta)}| \le \epsilon)] + \mathsf{E}\mathbf{1}(|\frac{b_{N_\theta}}{d(\theta)} - 1| > \epsilon) \le$$

$$\le \max\{\frac{1}{\epsilon}, \frac{C(\alpha)}{1 - \epsilon}\} \mathsf{E} \min\{\epsilon, |1 - \frac{b_{N_\theta}}{d(\theta)}|\}. \qquad (2.2.9)$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из неравенств (2.2.2), (2.2.3), (2.2.5) – (2.2.7) и (2.2.9). Теорема доказана.

Замечание 2.2.1. Можно показать, что условия

$$\Delta_n \to 0, \qquad \frac{b_{N_\theta}}{d(\theta)} \Longrightarrow 1, \qquad \frac{a_{N_\theta} - a_\theta}{d(\theta)} \Longrightarrow 0 \qquad (\theta \to \infty)$$

являются не только достаточными, но и необходимыми для того, чтобы выполнялось соотношение (2.2.1$'$) (см. (Gnedenko and Korolev, 1996), Sect. 3.4), так как условия

$$\frac{b_{N_n}}{d(n)} \Longrightarrow 1 \ \text{ и } \ \mathsf{E} \min\{\epsilon, \ |\frac{b_{N_n}}{d(n)} - 1|\} \Longrightarrow 0,$$

как легко видеть, являются эквивалентными.

2.3 Оценки скорости сходимости распределений случайных сумм к устойчивым законам в равномерной метрике

В этом разделе мы приведем оценку равномерного расстояния между функцией распределения случайной суммы, в которой слагаемые удовлетворяют условию (2.1.1), и устойчивой функцией распределения. Как мы видели выше, эта ситуация соответствует частному случаю Теоремы 2.1.1 с $V \stackrel{d}{=} 0$.

Теорема 2.3.1. *Для любых $\theta \in (0,\infty)$ и $\epsilon \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$\rho\left(\mathsf{P}\left(\frac{S_{N_\theta}-c(\theta)}{d(\theta)}<x\right),\, G_\alpha(x)\right) \ \le$$

$$\le \mathsf{E}\left[\rho\left(\mathsf{P}\left(\frac{S_{N_\theta}-a_{N_\theta}}{b_{N_\theta}}<x\right),\, G_\alpha(x)\right)\mathbf{1}(N_\theta\in\mathcal{N}_\epsilon)\right]+$$

$$+\max\left\{\frac{1}{\epsilon},\, \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\right\}\mathsf{E}\min\left\{\epsilon,\, \left|\frac{b_{N_\theta}}{d(\theta)}-1\right|\right\}+$$

$$+\min\left\{(C_1(\alpha)+1)\,L(F_\theta,E_0),\, C_1(\alpha)\mathsf{E}\left|\frac{a_{N_\theta}-c(\theta)}{d(\theta)}\right|,\right.$$

$$\left. C_1(\alpha)\left|\mathsf{E}\frac{a_{N_\theta}-c(\theta)}{d(\theta)}\right|+C_2(\alpha)\mathsf{E}\left(\frac{a_{N_\theta}-c(\theta)}{d(\theta)}\right)^2\right\},$$

где

$$C_1(\alpha)=\sup_x p_\alpha(x), \qquad C_2(\alpha)=\tfrac{1}{2}\sup_x p'_\alpha(x).$$

Доказательство этого результата практически повторяет доказательство Теоремы 2.1.1, в котором при оценивании I_1, I_2 и I_4 следует формально заменить H на E_0 и, соответственно, ξ на 0, а при оценивании I_3 верны неравенства

$$I_3 \ \le\ (1+C(\alpha))L(E_0,F_\theta), \qquad I_3 \ \le\ C_1(\alpha)\mathsf{E}\left|\frac{a_{N_\theta}-c(\theta)}{d(\theta)}\right|.$$

Также, по формуле Тейлора для любых x и y при некотором $\delta\in[0,1]$ мы имеем

$$G_\alpha(y-x)-G_\alpha(y)=xp_\alpha(y)+\tfrac{1}{2}x^2p'_\alpha(y+\delta x).$$

Поэтому

$$I_3 \;\le\; \sup_y \left| \mathsf{E} \left[G_\alpha(y) - G_\alpha \left(y - \frac{a_{N_\theta} - c(\theta)}{d(\theta)} \right) \right] \right| \le$$

$$\le\; C_1(\alpha) \left| \mathsf{E} \frac{a_{N_\theta} - c(\theta)}{d(\theta)} \right| + C_2(\alpha) \mathsf{E} \left(\frac{a_{N_\theta} - c(\theta)}{d(\theta)} \right)^2 .$$

Замечание 2.3.1. Если $\mathsf{E} a_{N_\theta} = c(\theta)$, то третье слагаемое в оценке для $\Delta(\theta)$, устанавливаемой Теоремой 2.3.1, равно

$$\min \left\{ (C_1(\alpha) + 1)\, L(F_\theta, E_0),\; C_1(\alpha) \mathsf{E} \left| \frac{a_{N_\theta} - c(\theta)}{d(\theta)} \right|,\; C_2(\alpha) \mathsf{E} \left(\frac{a_{N_\theta} - c(\theta)}{d(\theta)} \right)^2 \right\}.$$

2.4 Оценки точности аппроксимации устойчивыми законами распределений пуассоновских случайных сумм, в которых слагаемые имеют тяжелые хвосты

В качестве примера применения Теоремы 2.2.1 рассмотрим ситуацию, в которой случайная величина N_θ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Чтобы избежать путаницы в обозначениях, мы впредь будем считать, что $\theta = \lambda$, так что $N_\theta = N_\lambda$. Предположим, что слагаемые $X_1, X_2, \ldots$ удовлетворяют соотношению (2.1.1) с $b(n) \equiv const = b$ (в таком случае говорят, что общая функция распределения $F(x)$ слагаемых $X_1, X_2, \ldots$ принадлежит области *нормального* притяжения устойчивого закона G_α).

Нас интересует скорость сходимости в соотношении

$$\frac{S_{N_\lambda} - \lambda a}{b \lambda^{1/\alpha}} \Longrightarrow Y_\alpha \qquad (\lambda \to \infty).$$

Чтобы воспользоваться Теоремой 2.2.1, нам нужна оценка величины

$$\Delta_n^* \;=\; \sup_x \left| \mathsf{P} \left(\frac{S_n - an}{b n^{1/\alpha}} < x \right) - G_\alpha(x) \right|.$$

Воспользуемся оценками, приведенными в (Christoph and Wolf, 1992). С этой целью обозначим характеристические функции, соответствующие распределениям $F(x)$ и $G_\alpha(x)$, соответственно через $f(s)$ и $g_\alpha(s)$, $s \in \mathbb{R}$. Пусть $r > 0$ и $\nu_r = \nu_r(F - G_\alpha)$ – такой функционал от разности функций распределения $F(x)$ и $G_\alpha(x)$, что при некоторых $A > 0$ и $\epsilon > 0$ для всех $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ выполнено неравенство

$$|f(s) - g_\alpha(s)| \ \le \ A|s|^r \nu_r. \tag{2.4.1}$$

Не загромождая изложение дополнительными обозначениями, отметим, что в различных работах (см., например, (Паулаускас, 1969), (Миталаускас, 1971), (Банис, 1972), (Zolotarev, 1973), (Сатыбалдина, 1972), (Сатыбалдина, 1973), (Стейшунас, 1974), (Кароблис, 1983)) в качестве ν_r различные разностные псевдомоменты.

В (Christoph and Wolf, 1992) приведен результат (Теорема 3.11), из которого вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.4.1. *Пусть $\alpha < r \le 1 + \alpha$. Существует константа $C_0(r, \alpha)$, зависящая только от α и r, такая, что*

$$\Delta_n^* \ \le \ C_0(r,\alpha)\frac{\max\{\nu_r,\ \nu_r^{1/(r+1)}\}}{n^{(r-\alpha)/\alpha}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Легко видеть, что в рассматриваемом случае

$$\mathcal{N}_\epsilon = \mathcal{N}_\epsilon(\lambda) = \{n:\ \lambda(1-\epsilon)^\alpha \le n \le \lambda(1+\epsilon)^\alpha\}.$$

Поэтому

$$\mathsf{E}[\Delta_{N_\lambda}^* \mathbf{1}(N_\lambda \in \mathcal{N}_\epsilon)] \ \le \ C_0(\alpha, r)\max\{\nu_r, \nu_r^{1/(r+1)}\} \sum_{n \ge \lambda(1-\epsilon)^\alpha} \frac{\mathsf{P}(N_\lambda = n)}{n^{(r-\alpha)/\alpha}} \ \le$$

$$\le \ \frac{C_0(\alpha, r)}{(1-\epsilon)^\alpha} \cdot \frac{\max\{\nu_r, \nu_r^{1/(r+1)}\}}{\lambda^{(r-\alpha)/\alpha}}.$$

С помощью элементарных рассуждений можно убедиться, что

$$|x^{1/\alpha} - 1| \ \le \ |x - 1|$$

при любых $\alpha \in (1, 2)$ и $x \ge 0$. Следовательно,

$$\mathsf{E}\min\left\{\left|\frac{N_\lambda^{1/\alpha}}{\lambda^{1/\alpha}} - 1\right|,\ \epsilon\right\} \le \mathsf{E}\min\left\{\left|\frac{N_\lambda}{\lambda} - 1\right|,\ \epsilon\right\} \le \frac{\sqrt{\mathsf{D}N_\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Наконец, заметим, что $a\lambda = a\mathsf{E}N_\lambda$ и

$$\mathsf{E}\Big(\frac{a(N_\lambda-\lambda)}{b\lambda^{1/\alpha}}\Big)^2 = \frac{a^2\mathsf{D}N_\lambda}{b^2\lambda^{2/\alpha}} = \frac{a^2}{b^2\lambda^{2/\alpha-1}}.$$

Подставляя полученные выражения в оценку, приведенную в Теореме 2.3.1, мы приходим к следующему результату. Обозначим

$$\Delta^*(\lambda) \ = \ \sup_x \left|\mathsf{P}\left(\frac{S_{N_\lambda}-\lambda a}{b\lambda^{1/\alpha}} < x\right) - G_\alpha(x)\right|.$$

Теорема 2.4.2. *Пусть $\alpha \in (1,2)$ и соотношение (2.4.1) выполнено при $\alpha < r \le 1+\alpha$. Тогда для любых $\lambda > 0$ и $\epsilon \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$\Delta^*(\lambda) \ \le \ \frac{C_0(\alpha,r)}{(1-\epsilon)^\alpha\lambda^{(r-\alpha)/\alpha}}\max\{\nu_r,\ \nu_r^{1/(r+1)}\}+$$
$$+\frac{C_2(\alpha)a^2}{b^2\lambda^{(2-\alpha)/\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\max\left\{\frac{1}{\epsilon},\ \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\right\}.$$

Следствие 2.4.1. *Пусть $\alpha \in (1,2)$ и соотношение (2.4.1) выполнено при $\alpha < r \le 1+\alpha$. Тогда для любых $\lambda > 0$ и $\epsilon \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$\lambda^{m(\alpha,r)}\Delta^*(\lambda) \ \le \ \frac{C_0(\alpha,r)}{(1-\epsilon)^\alpha}\max\{\nu_r,\nu_r^{1/(r+1)}\} + \max\left\{\frac{1}{\epsilon},\ \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\right\} + \frac{C_2(\alpha)a^2}{b^2},$$

где

$$m(\alpha,r) \ = \ \min\left\{\frac{1}{2},\ \frac{2-\alpha}{\alpha},\ \frac{r-\alpha}{\alpha}\right\}.$$

2.5 Оценки точности аппроксимации распределений случайных сумм "сопровождающими" сдвиговыми смесями устойчивых законов

Вновь вернемся к общей ситуации и рассмотрим функцию распределения

$$W_{\alpha,\theta}(x) \ = \ \sum_{n=1}^\infty \mathsf{P}(N_\theta = n)G_\alpha(x - \frac{a_n - c(\theta)}{d(\theta)}) \ =$$

$$= \ \sum_{n=1}^\infty \mathsf{P}(N_\theta = n)\mathsf{P}(Y_\alpha < x - \frac{a_n - c(\theta)}{d(\theta)}) \ =$$

$$= \mathsf{P}(Y_\alpha + \frac{a_{N_\theta} - c(\theta)}{d(\theta)} < x) = (G_\alpha * F_\theta)(x).$$

Обозначим

$$\widetilde{\Delta}(\theta) \ = \ \rho_H \left(\mathsf{P}\left(\frac{S_{N_\theta} - c(\theta)}{d(\theta)} < x \right), W_{\alpha,\theta}(x) \right).$$

Из Теоремы 2.2.1 при этом вытекает следующий результат.

Теорема 2.5.1. *Для любых $\theta \in (0,\infty)$ и $\epsilon \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$\widetilde{\Delta}(\theta) \ \le \ \mathsf{E}[\Delta_{N_\theta} \mathbf{1}(N_\theta \in \mathcal{N}_\epsilon)] + \max\left\{ \frac{1}{\epsilon}, \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon} \right\} \mathsf{E} \min\left\{ \epsilon, \left| \frac{b_{N_\theta}}{d(\theta)} - 1 \right| \right\}.$$

Доказательство этого результата повторяет доказательство Теоремы 2.2.1 за исключением того, что в данном случае $I_3 = 0$.

Рассмотрим равномерную метрику и обозначим

$$\widetilde{\Delta}^*(\theta) \ = \ \rho \left(\mathsf{P}\left(\frac{S_{N_\theta} - c(\theta)}{d(\theta)} < x \right), W_{\alpha,\theta}(x) \right).$$

Из Теоремы 2.3.1 при этом вытекает следующий результат.

Теорема 2.5.2. *Для любых $\theta \in (0,\infty)$ и $\epsilon \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$\widetilde{\Delta}^*(\theta) \ \le \ \mathsf{E}[\Delta^*_{N_\theta} \mathbf{1}(N_\theta \in \mathcal{N}_\epsilon)] + \max\left\{ \frac{1}{\epsilon}, \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon} \right\} \mathsf{E} \min\left\{ \epsilon, \left| \frac{b_{N_\theta}}{d(\theta)} - 1 \right| \right\}.$$

Для пуассоновских случайных сумм, в которых функция распределения слагаемых принадлежит к области нормального притяжения устойчивого закона G_α, мы получаем следующее утверждение. Обозначим

$$F^*_\lambda(x) = \mathsf{P}\left(\frac{a(N_\lambda - \lambda)}{b\lambda^{1/\alpha}} < x \right), \quad W_{\alpha,\lambda}(x) = (G_\alpha * F^*_\lambda)(x),$$

$$\widetilde{\Delta}^*(\lambda) \ = \ \sup_x \left| \mathsf{P}\left(\frac{S_{N_\lambda} - \lambda a}{b\lambda^{1/\alpha}} < x \right) - W_{\alpha,\lambda}(x) \right|.$$

Теорема 2.5.3. *Пусть $\alpha \in (1,2)$ и соотношение (2.4.1) выполнено при $\alpha < r \le 1+\alpha$. Тогда для любых $\lambda > 0$ и $\epsilon \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$\widetilde{\Delta}^*(\lambda) \ \le \ \frac{C_0(\alpha,r)}{\lambda^{(r-\alpha)/\alpha}} \cdot \frac{\max\{\nu_r, \nu_r^{1/(r+1)}\}}{(1-\epsilon)^\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \max\left\{ \frac{1}{\epsilon}, \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon} \right\}.$$

Следствие 2.5.1. *Пусть $\alpha \in (1,2)$ и соотношение (2.4.1) выполнено при $\alpha < r \le 1+\alpha$. Тогда для любых $\lambda > 0$ и $\epsilon \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$\lambda^{M(\alpha,r)}\widetilde{\Delta}^*(\lambda) \;\le\; \frac{C_0(\alpha,r)}{(1-\epsilon)^{\alpha}}\max\left\{\nu_r, \nu_r^{1/(r+1)}\right\} + \max\left\{\frac{1}{\epsilon}, \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\right\},$$

где

$$M(\alpha,r) \;=\; \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{r-\alpha}{\alpha}\right\}.$$

2.6 Оценки скорости сходимости распределений случайных сумм к сдвиговым смесям устойчивых законов

Предельным законом в Теореме 2.1.1 является свертка $(G_\alpha * \widehat{F})(x)$, где $\widehat{F}(x) = \mathsf{P}(V < x)$, которая, естественно, может рассматриваться как сдвиговая смесь устойчивого распределения G_α при смешивающем распределении $\widehat{F}(x)$.

В связи с этим вернемся к рассмотрению общей ситуации и предположим, что

$$\frac{a_{N_\theta} - c(\theta)}{d(\theta)} \Longrightarrow V \qquad (\theta \to \infty).$$

При этом по неравенству треугольника с учетом того, что $W_{\alpha,\theta}(x) = G_\alpha * F_\theta(x)$, мы имеем

$$\rho_H\left(\mathsf{P}\left(\frac{S_{N_\theta} - c(\theta)}{d(\theta)} < x\right), (G_\alpha * \widehat{F})(x)\right) \;\le$$

$$\le\; \rho_H(\mathsf{P}(\frac{S_{N_\theta} - c(\theta)}{d(\theta)} < x), W_{\alpha,\theta}(x)) + \rho_H(G_\alpha * F_\theta,\, G_\alpha * \widehat{F}).$$

Более того, так как

$$\rho_H(G_\alpha * F_\theta,\, G_\alpha * \widehat{F}) \le \rho_H(F_\theta,\, \widehat{F}),$$

то из Теоремы 2.5.1 мы при этом получаем следующий результат.

Теорема 2.6.1. *Для любых $\theta \in (0,\infty)$ и $\epsilon \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$\rho_H\left(\mathsf{P}\left(\frac{S_{N_\theta} - c(\theta)}{d(\theta)} < x\right), (G_\alpha * \widehat{F})(x)\right) \;\le\; \mathsf{E}[\Delta_{N_\theta}\mathbf{1}(N_\theta \in \mathcal{N}_\epsilon)] +$$

$$+\max\left\{\frac{1}{\epsilon},\ \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\right\}\mathsf{E}\min\left\{\epsilon,\ \left|\frac{b_{N_\theta}}{d(\theta)}-1\right|\right\}+\rho_H(F_\theta,\ \widehat{F}).$$

Но так как

$$\sup_x\ (H*\widehat{F})'(x)\leq\sup_x H'(x)=C_H,$$

то

$$\rho_H(F_\theta,\ \widehat{F})\leq(1+C_H)L(F_\theta*H,\ \widehat{F}*H)\leq$$
$$\leq(1+C_H)[L(H,\ H)+L(F_\theta,\ \widehat{F})]=(1+C_H)L(F_\theta,\ \widehat{F}),$$

то справедливо

Следствие 2.6.1. *Для любых $\theta\in(0,\infty)$ и $\epsilon\in(0,1)$ справедлива оценка*

$$\rho_H\left(\mathsf{P}\left(\frac{S_{N_\theta}-c(\theta)}{d(\theta)}<x\right),\ (G_\alpha*\widehat{F})(x)\right)\ \leq\ \mathsf{E}[\Delta_{N_\theta}\mathbf{1}(N_\theta\in\mathcal{N}_\epsilon)]+$$
$$+\max\left\{\frac{1}{\epsilon},\ \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\right\}\mathsf{E}\min\left\{\epsilon,\ \left|\frac{b_{N_\theta}}{d(\theta)}-1\right|\right\}+(1+C_H)L(F_\theta,\ \widehat{F}).$$

Очевидным образом мы аналогично можем получить оценки и для равномерного расстояния.

Теорема 2.6.2. *Для любых $\theta\in(0,\infty)$ и $\epsilon\in(0,1)$ справедлива оценка*

$$\sup_x\left|\mathsf{P}\left(\frac{S_{N_\theta}-c(\theta)}{d(\theta)}<x\right)-(G_\alpha*\widehat{F})(x)\right|\ \leq\ \mathsf{E}[\Delta^*_{N_\theta}\mathbf{1}(N_\theta\in\mathcal{N}_\epsilon)]+$$
$$+\max\left\{\frac{1}{\epsilon},\ \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\right\}\mathsf{E}\min\left\{\epsilon,\ \left|\frac{b_{N_\theta}}{d(\theta)}-1\right|\right\}+\rho_{G_\alpha}(F_\theta,\ \widehat{F}).$$

Следствие 2.6.2. *Для любых $\theta\in(0,\infty)$ и $\epsilon\in(0,1)$ справедлива оценка*

$$\sup_x\left|\mathsf{P}\left(\frac{S_{N_\theta}-c(\theta)}{d(\theta)}<x\right)-(G_\alpha*\widehat{F})(x)\right|\ \leq\ \mathsf{E}[\Delta^*_{N_\theta}\mathbf{1}(N_\theta\in\mathcal{N}_\epsilon)]+$$
$$+\max\left\{\frac{1}{\epsilon},\ \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\right\}\mathsf{E}\min\left\{\epsilon,\ \left|\frac{b_{N_\theta}}{d(\theta)}-1\right|\right\}+(1+C(\alpha))L(F_\theta,\ \widehat{F}).$$

3

Асимптотическое поведение обобщенных процессов Кокса с большими скачками

3.1 Обобщенные процессы Кокса.

Пусть $N_1(t),\ t \geq 0$, – однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью, а $\Lambda(t),\ t \geq 0$, – независимый от $N_1(t)$ процесс, обладающий следующими свойствами: $\Lambda(0) = 0,\ \mathsf{P}(\Lambda(t) < \infty) = 1$ для любого $t > 0$, траектории $\Lambda(t)$ не убывают и непрерывны справа. Дважды стохастический пуассоновский процесс $N(t)$, называемый также процессом Кокса, определяется как суперпозиция $N_1(t)$ и $\Lambda(t)$:

$$N(t) = N_1(\Lambda(t)) \qquad (t \geq 0).$$

В этом случае будем говорить, что процесс Кокса $N(t)$ управляется процессом $\Lambda(t)$. Свойства процессов Кокса подробно описаны в (Grandell, 1976).

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – случайные величины с общей функцией распределения $F(x)$. Предположим, что при каждом $t \geq 0$ случайные величины $N(t), X_1, X_2, \ldots$ независимы. Процесс

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j \qquad (t \geq 0) \tag{3.1.1}$$

называется *обобщенным процессом Кокса* (при этом для определенности считаем, что $\sum_{j=1}^{0} = 0$).

Асимптотическое поведение обобщенных процессов Кокса (3.1.1) при $t \to \infty$ в случае, когда случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ имеют конечные дисперсии, рассмотрено, например, в (Bening and Korolev, 2002). В частности, в упомянутой книге приведен следующий результат.

Теорема 3.1.1. *Предположим, что* $\mathsf{E}X_1 = a \neq 0$, $0 < \mathsf{D}X_1 = \sigma^2 < \infty$ *и* $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ *при* $t \to \infty$. *Пусть* $D(t) > 0$ *– такая функция, что* $D(t) \to \infty$ *при* $t \to \infty$. *Тогда одномерные распределения надлежащим образом центрированного и нормированного обобщенного процесса Кокса* $S(t)$ *слабо сходятся при* $t \to \infty$ *к распределению некоторой случайной величины* Z, *то есть*

$$\frac{S(t) - C(t)}{D(t)} \Longrightarrow Z \qquad (t \to \infty)$$

при некоторой вещественной функции $C(t)$, *тогда и только тогда, когда*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|C(t)|}{D^2(t)} \equiv k^2 < \infty$$

и существует такая случайная величина V, *что*

$$Z \stackrel{d}{=} k \cdot \frac{\sqrt{a^2+\sigma^2}}{|a|} \cdot W + V,$$

где W *– случайная величина со стандартным нормальным распределением, независимая от* V, *и*

$$L_1\Big(\frac{a\Lambda(t) - C(t)}{D(t)}, V(t)\Big) \to 0 \qquad (t \to \infty),$$

где распределение случайной величины $V(t)$ *определяется характеристической функцией*

$$\mathsf{E}\exp\{isV(t)\} = \exp\Big\{-\frac{s^2(a^2+\sigma^2)}{2|a|}\Big[k^2 - \frac{|C(t)|}{D^2(t)}\Big]\Big\}\mathsf{E}\exp\{isV\} \qquad (s \in \mathbb{R}),$$

$L_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ *– метрика в пространстве случайных величин, метризующая слабую сходимость.*

Цель данной главы состоит в доказательстве аналога Теоремы 3.1.1 для более широкого класса распределений случайных величин, заменив требование существования дисперсий более общим условием.

Пусть общая функция распределения $F(x)$ случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ притягивается к $G(x)$ и пусть существуют $\alpha \in (1,2]$, $a \in \mathbb{R}$, медленно меняющаяся функция $b(t)$, $t > 0$, невырожденная случайная величина Y_α, имеющая устойчивое распределение с коэффициентом устойчивости α, такие, что имеет место слабая сходимость (2.1.1).

Мы будем рассматривать асимптотическое поведение обобщенных процессов Кокса не при произвольном центрировании и нормировании, а при центрировании и нормировании неслучайными функциями специального вида. А именно, в соответствии с условием (2.1.1) мы будем рассматривать асимптотическое поведение случайных величин

$$Z(t) \;=\; \frac{S(t)-at}{b(t)t^{1/\alpha}} \qquad (t \to \infty). \tag{3.1.2}$$

Оказывается, что при таком специальном виде центрирующих и нормирующих функций условия сходимости приобретают довольно простую форму.

3.2 Лемма об асимптотическом поведении суперпозиций независимых случайных процессов.

Для доказательства основной теоремы мы будем использовать критерий слабой сходимости суперпозиций независимых случайных процессов, доказанный в (Korolev, 1996) (см. также (Gnedenko and Korolev, 1996), (Бенинг и Королев, 2000b), (Bening and Korolev, 2002)). Перед тем, как сформулировать этот критерий, напомним некоторые определения.

Определение 3.2.1. *Семейство случайных величин $\{X_n\}_{n\geq 1}$ называется слабо компактным, если каждая последовательность его элементов содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Известно, что семейство случайных величин $\{X_n\}_{n\geq 1}$ слабо компактно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{R\to\infty} \sup_n \mathsf{P}(|X_n| > R) = 0$$

(см., например, (Гнеденко и Колмогоров, 1949), глава 2, раздел 9).

В Главе 2 было дано определение метрики Леви для одномерного случая. Аналогом метрики Леви в многомерных (и даже бесконечномерных) пространствах является метрика Леви–Прохорова, определяемая следующим образом. Пусть $(E, \mathcal{E}, \rho)$ – метрическое пространство и $\mathfrak{P}(E)$ – множество вероятностных мер на измеримом пространстве $(E, \mathcal{E})$. Пусть $A \subset E$. Положим $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) : \ y \in A\}$. Пусть $\epsilon > 0$. Обозначим $A^\epsilon = \{x \in E : \ \rho(x, A) < \epsilon\}, \quad A \in \mathcal{E}$. Пусть P_1 и P_2 – произвольные вероятностные меры из $\mathfrak{P}(E)$. Положим

$$\sigma(\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2) =$$

$$= \inf\{\epsilon > 0 : \ \mathsf{P}_1(A) \leq \mathsf{P}_2(A^\epsilon) + \epsilon \text{ для всех замкнутых множеств } A \in \mathcal{E}\}.$$

Определение 3.2.2. *Расстояние Леви–Прохорова $L_2(\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2)$ между мерами P_1 и P_2 определяется как*

$$L_2(\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2) = \max\{\sigma(\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2), \sigma(\mathsf{P}_2, \mathsf{P}_1)\}.$$

Под расстоянием Леви–Прохорова между случайными векторами X и Y мы будем подразумевать расстояние Леви–Прохорова между индуцированными ими вероятностными распределениями: $L_2(X, Y) = L_2(\mathsf{P}_X, \mathsf{P}_Y)$.

Хорошо известно, что *слабая сходимость случайных векторов эквивалентна их сходимости в метрике Леви–Прохорова* (см., например, (Ширяев, 1989).

Пусть $X(t)$ и $M(t)$, $t \geq 0$, – независимые случайные процессы такие, что $X(t)$ измери́м и $\mathsf{P}(M(t) < \infty) = 1$ при любом $t > 0$ (под измеримостью случайного процесса мы подразумеваем его измеримость относительно прямого произведения σ-алгебры исходного вероятностного пространства и борелевской σ-алгебры подмножеств неотрицательной полупрямой). Пусть $A(t)$, $B(t)$ и $D(t)$ – вещественные функции такие, что $A(t)$ и $B(t)$ измеримы, $B(t) > 0$, $D(t) > 0$. Пусть L_1 и L_2, как и ранее, – метрики, метризующие слабую сходимость в пространствах соответственно одно- и двумерных случайных величин (или, что то же самое, их распределений). Например, L_1 – это метрика Леви, L_2 – это метрика Леви-Прохорова.

Следующий критерий слабой сходимости суперпозиций независимых случайных процессов представляет собой обобщение и уточнение знаменитой Леммы Добрушина (Добрушин, 1955), в которой впервые были описаны достаточные условия слабой сходимости суперпозиций независимых случайных последовательностей. Лемма содержит *необходимые и достаточные* условия слабой сходимости суперпозиций независимых случайных *процессов.*

Лемма 3.2.1. *Предположим, что* $B(t) \to \infty$ *и* $D(t) \to \infty$ *при* $t \to \infty$ *и семейства случайных величин*

$$\left\{\frac{X(t)-A(t)}{B(t)}\right\}_{t>0} \quad \text{и} \quad \left\{\frac{B(M(t))}{D(t)}\right\}_{t>0}$$

слабо компактны на бесконечности. Для того чтобы одномерные распределения неслучайно центрированных и нормированных суперпозиций случайных процессов $X(t)$ *и* $M(t)$ *слабо сходились к распределению некоторой случайной величины* Z*:*

$$\frac{X(M(t))-C(t)}{D(t)} \Longrightarrow Z \quad (t \to \infty)$$

при некоторой вещественной функции $C(t)$*, необходимо и достаточно, чтобы существовало слабо компактное на бесконечности семейство троек случайных величин* $\{(Y(t), U(t), V(t))\}_{t>0}$ *таких, что:*

1. $Z \stackrel{d}{=} Y(t)U(t) + V(t)$ *при каждом* $t > 0$*, причем* $Y(t)$ *и пара* $(U(t), V(t))$ *независимы;*

2. $L_1\left(\dfrac{X(t)-A(t)}{B(t)},\ Y(t)\right) \longrightarrow 0 \quad (t \to \infty)$;

3. $L_2\left(\left(\dfrac{B(M(t))}{D(t)}, \dfrac{A(M(t))-C(t)}{D(t)}\right),\ (U(t), V(t))\right) \longrightarrow 0 \quad (t \to \infty)$.

Асимптотическое поведение процессов Кокса полностью определяется асимптотическим поведением соответствующего управляющего процесса, (см. (Бенинг и Королев, 2000b), (Bening and Korolev, 2002)). Из всего многообразия асимптотических свойств процессов Кокса, описанных в этих книгах, нам ниже понадобится следующая

Лемма 3.2.2. *Пусть* $N(t)$ *– процесс Кокса, управляемый процессом* $\Lambda(t)$*. Тогда* $N(t) \xrightarrow{P} \infty$ *(*$t \to \infty$*) если и только если* $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ *(*$t \to \infty$*).*

Доказательство можно найти в (Бенинг и Королев, 2000b), Лемма 2.6.1.

3.3 Основная теорема о сходимости обобщенных процессов Кокса с большими скачками.

В следующей теореме представлены необходимые и достаточные условия сходимости распределений обобщенных процессов Кокса с большими скачками.

Теорема 3.3.1. *Предположим, что* $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ *при* $t \to \infty$, *а случайные величины* $X_1, X_2, \ldots$ *удовлетворяют условию (2.1.1). Случайные величины* $Z(t)$, *определяемые соотношением (3.1.2), сходятся по распределению к некоторой случайной величине* Z,

$$Z(t) \implies Z \qquad (t \to \infty), \tag{3.3.1}$$

тогда и только тогда, когда существует случайная величина V *такая, что*

$$Z \stackrel{d}{=} Y_\alpha + V, \tag{3.3.2}$$

причем случайные величины Y_α *и* V *в правой части (3.3.2) независимы, и*

$$\frac{a(\Lambda(t) - t)}{b(t)t^{1/\alpha}} \implies V \quad (t \to \infty). \tag{3.3.3}$$

Доказательство. Наряду с процессом $S(t)$ рассмотрим обобщенный пуассоновский процесс

$$S_0(t) = \sum_{j=0}^{N_1(t)} X_j, \quad t \geq 0,$$

вновь для определенности полагая, что, если $N_1(t) = 0$, то $S_0(t) = 0$. Поскольку

$$S(t) = S_0(\Lambda(t)),$$

для доказательства теоремы мы будем использовать критерий слабой сходимости суперпозиций независимых случайных процессов, представленный Леммой 3.2.1.

Чтобы свести доказательство Теоремы 3.3.1 к Лемме 3.2.1, положим

$$X(t) = S_0(t), \quad A(t) = C(t) = at,$$

$$B(t) = D(t) = b(t)t^{1/\alpha}, \quad M(t) = \Lambda(t).$$

В Лемме 3.2.1 требуется, чтобы семейство случайных величин $\{(X(t) - A(t))/B(t)\}_{t>0}$ было слабо компактным на бесконечности. Убедимся, что указанный выше выбор функций $A(t)$ и $B(t)$ обеспечивает выполнение этого требования. Более того, мы убедимся, что имеет место более сильное утверждение, а именно,

$$\frac{X(t) - A(t)}{B(t)} \equiv \frac{S_0(t) - at}{b(t)t^{1/\alpha}} \Longrightarrow Y_\alpha \quad (t \to \infty). \tag{3.3.4}$$

Чтобы доказать (3.3.4), мы опять-таки воспользуемся Леммой 3.2.1. Обозначим

$$\widetilde{X}(t) = \sum_{j=1}^{[t]} X_j, \qquad \widetilde{A}(t) = \widetilde{C}(t) = at,$$

$$\widetilde{B}(t) = \widetilde{D}(t) = b(t)t^{1/\alpha}, \qquad \widetilde{M}(t) = N_1(t),$$

где $[t]$ – целая часть числа t. Применим Лемму 3.2.1 к процессам $\widetilde{X}(t)$ и $\widetilde{M}(t)$ с функциями $\widetilde{A}(t)$, $\widetilde{B}(t)$, $\widetilde{C}(t)$ и $\widetilde{D}(t)$. Легко убедиться, что условие (3.3.3) влечет соотношение

$$\frac{\widetilde{X}(t) - \widetilde{A}(t)}{\widetilde{B}(t)} \equiv \frac{\sum_{j=1}^{[t]} X_j - at}{b(t)t^{1/\alpha}} \Longrightarrow Y_\alpha \quad (t \to \infty). \tag{3.3.5}$$

Покажем, что

$$\frac{\widetilde{B}(\widetilde{M}(t))}{\widetilde{D}(t)} \equiv \frac{b(N_1(t))N_1^{1/\alpha}(t)}{b(t)t^{1/\alpha}} \Longrightarrow 1 \quad (t \to \infty). \tag{3.3.6}$$

В силу неравенства

$$\mathsf{P}(|W_1 + W_2| > \delta) \le \mathsf{P}(|W_1| > \frac{\delta}{2}) + \mathsf{P}(|W_2| > \frac{\delta}{2}),$$

справедливого для любых случайных величин W_1 и W_2 и для любого $\delta > 0$, при произвольном $\epsilon > 0$ мы имеем

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{\widetilde{B}(N_1(t))}{\widetilde{B}(t)} - 1\Big| > \epsilon\Big) = \mathsf{P}\Big(\Big|\Big(\frac{N_1(t)}{t}\Big)^{1/\alpha}\frac{b(N_1(t))}{b(t)} - 1\Big| > \epsilon\Big) =$$

$$= \mathsf{P}\Big(\Big|\Big(\frac{N_1(t)}{t}\Big)^{1/\alpha}\Big(\frac{b(N_1(t))}{b(t)} - 1\Big) + \Big(\frac{N_1(t)}{t}\Big)^{1/\alpha} - 1\Big| > \epsilon\Big) \le$$

$$\leq \mathsf{P}\Big(\Big|\Big(\frac{N_1(t)}{t}\Big)^{1/\alpha}\Big(\frac{b(N_1(t))}{b(t)}-1\Big)\Big|>\frac{\epsilon}{2}\Big)+\mathsf{P}\Big(\Big|\Big(\frac{N_1(t)}{t}\Big)^{1/\alpha}-1\Big|>\frac{\epsilon}{2}\Big). \tag{3.3.7}$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (3.3.7). Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\Big(\frac{N_1(t)}{t}\Big)^{1/\alpha}\Big(\frac{b(N_1(t))}{b(t)}-1\Big)\Big|>\frac{\epsilon}{2}\Big)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(N_1(t)=n)\mathsf{P}\left(\left|\frac{b(n)}{b(t)}-1\right|>\frac{\epsilon t^{1/\alpha}}{2n^{1/\alpha}}\right)=$$

$$=\sum_{n:\left|\frac{n}{t}-1\right|\leq\frac{1}{2}}\mathsf{P}(N_1(t)=n)\mathsf{P}\left(\left|\frac{b(n)}{b(t)}-1\right|>\frac{\epsilon t^{1/\alpha}}{2n^{1/\alpha}}\right)+$$

$$+\sum_{n:\left|\frac{n}{t}-1\right|>\frac{1}{2}}\mathsf{P}(N_1(t)=n)\mathsf{P}\left(\left|\frac{b(n)}{b(t)}-1\right|>\frac{\epsilon t^{1/\alpha}}{2n^{1/\alpha}}\right)\leq$$

$$\leq\sum_{n:\left|\frac{n}{t}-1\right|\leq\frac{1}{2}}\mathsf{P}(N_1(t)=n)\mathsf{P}\left(\left|\frac{b(n)}{b(t)}-1\right|>\frac{2^{1/\alpha-1}\epsilon}{3^{1/\alpha}}\right)+\mathsf{P}\left(\left|\frac{N_1(t)}{t}-1\right|>\frac{1}{2}\right)\leq$$

$$\leq\sum_{n:\left|\frac{n}{t}-1\right|\leq\frac{1}{2}}\mathsf{P}(N_1(t)=n)\mathsf{P}\left(\sup_{\frac{1}{2}\leq p\leq\frac{3}{2}}\left|\frac{b(tp)}{b(t)}-1\right|>\frac{2^{1/\alpha-1}\epsilon}{3^{1/\alpha}}\right)+$$

$$+\mathsf{P}\left(\left|\frac{N_1(t)}{t}-1\right|>\frac{1}{2}\right)\leq$$

$$\leq\mathsf{P}\left(\sup_{\frac{1}{2}\leq p\leq\frac{3}{2}}\left|\frac{b(tp)}{b(t)}-1\right|>\frac{2^{1/\alpha-1}\epsilon}{3^{1/\alpha}}\right)+\mathsf{P}\left(\left|\frac{N_1(t)}{t}-1\right|>\frac{1}{2}\right). \tag{3.3.8}$$

Согласно Теореме 1.1 в (Сенета, 1985), сходимость

$$\lim_{t\to\infty}\frac{b(pt)}{b(t)} \;=\; 1$$

равномерна на каждом замкнутом интервале значений p. Поэтому существует $t_0=t_0(\epsilon)$ такое, что для всех $t\geq t_0$

$$\sup_{\frac{1}{2}\leq p\leq\frac{3}{2}}\left|\frac{b(tp)}{b(t)}-1\right|<\frac{2^{1/\alpha-1}\epsilon}{3^{1/\alpha}}. \tag{3.3.9}$$

Таким образом, в соответствии с (3.3.8) и (3.3.9) при всех $t \geq t_0$ мы имеем

$$\mathsf{P}\left(\left|\left(\frac{N_1(t)}{t}\right)^{1/\alpha}\left(\frac{b(N_1(t))}{b(t)}-1\right)\right|>\frac{\epsilon}{2}\right)\leq \mathsf{P}\left(\left|\frac{N_1(t)}{t}-1\right|>\frac{1}{2}\right)$$

и потому, согласно уже доказанному,

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\Big(\Big|\left(\frac{N_1(t)}{t}\right)^{1/\alpha}\left(\frac{b(N_1(t))}{b(t)}-1\right)\Big|>\frac{\epsilon}{2}\Big)\ \leq\ \lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{N_1(t)}{t}-1\Big|>\frac{1}{2}\Big)=0. \tag{3.3.10}$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (3.3.7). Поскольку $N_1(t)/t \Longrightarrow 1$ при $t \to \infty$, $N_1(t)/t \xrightarrow{P} 1$ и потому $(N_1(t)/t)^{1/\alpha} \xrightarrow{P} 1$, то есть

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\Big(\Big|\left(\frac{N_1(t)}{t}\right)^{1/\alpha}-1\Big|>\frac{\epsilon}{2}\Big)=0. \tag{3.3.10$'$}$$

Теперь требуемое соотношение (3.3.6) вытекает из (3.3.7), (3.3.10) и (3.3.10').

Таким образом, соотношения (3.3.5) и (3.3.6) означают, что семейства случайных величин $\{(\widetilde{X}(t)-\widetilde{A}(t))/\widetilde{B}(t)\}_{t\geq 0}$ и $\{\widetilde{B}(\widetilde{M}(t))/\widetilde{D}(t)\}_{t\geq 0}$ слабо компактны на бесконечности, и поэтому мы можем воспользоваться Леммой 3.2.1. При этом оказывается, что

$$\frac{\widetilde{A}(\widetilde{M}(t))-\widetilde{C}(t)}{\widetilde{D}(t)}\ \equiv\ \frac{a(N_1(t)-t)}{b(t)t^{1/\alpha}}\ =$$

$$=\ \frac{a}{b(t)t^{(2-\alpha)/2\alpha}}\cdot\frac{N_1(t)-t}{\sqrt{t}}\ \Longrightarrow\ 0\qquad (t\to\infty), \tag{3.3.11}$$

поскольку

$$\frac{a}{b(t)t^{(2-\alpha)/2\alpha}}\ \longrightarrow 0\quad (t\to\infty),$$

в то время как хорошо известно, что

$$\frac{N_1(t)-t}{\sqrt{t}}\Longrightarrow W\quad (t\to\infty),$$

где W – случайная величина со стандартным нормальным распределением.

Из соотношений (3.3.5), (3.3.6) и (3.3.11) по Лемме 3.2.1 вытекает, что имеет место сходимость

$$\frac{\sum_{j=1}^{N_1(t)} X_j - at}{b(t)t^{1/\alpha}} \Longrightarrow Y_\alpha \quad (t \to \infty), \tag{3.3.12}$$

откуда в свою очередь вытекает (3.3.4).

Заметим, что соотношение (3.3.4) является обобщением известного свойства асимптотической нормальности классического процесса Кокса с требованиями, имеющими конечные дисперсии, на классические процессы Кокса с требованиями, удовлетворяющими условию (3.3.3).

Докажем **необходимость** условий Теоремы 3.3.1.

С этой целью, чтобы воспользоваться критерием слабой сходимости распределений суперпозиций независимых случайных процессов, устанавливаемым Леммой 3.2.1, убедимся, что условия (3.3.1) и (3.3.4) влекут слабую компактность на бесконечности семейства случайных величин

$$\Big\{\frac{B(M(t))}{D(t)} = \frac{b(\Lambda(t))\Lambda^{1/\alpha}(t)}{b(t)t^{1/\alpha}}\Big\}_{t\geq 0}. \tag{3.3.13}$$

С этой целью мы сначала покажем, что семейство случайных величин

$$\Big\{\frac{b(N(t))N^{1/\alpha}(t)}{b(t)t^{1/\alpha}} = \frac{b(N_1(\Lambda(t)))N_1^{1/\alpha}(\Lambda(t))}{b(t)t^{1/\alpha}}\Big\}_{t\geq 0} \tag{3.3.14}$$

слабо компактно на бесконечности. Пусть $X_1', X_2', \ldots$ – одинаково распределенные случайные величины такие, что $X_1 \stackrel{d}{=} X_1'$, причем случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_1', X_2', \ldots$ независимы. Обозначим $X_j^{(s)} = X_j - X_j'$, $j \geq 1$,

$$T(t) = \frac{1}{b(t)t^{1/\alpha}} \sum_{j=1}^{N(t)} X_j^{(s)}, \qquad (t \geq 0).$$

Очевидно, что

$$\mathsf{P}(|T(t)| \geq x) =$$

$$= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \mathsf{P}(N_1(\lambda) = n)\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{1}{b(t)t^{1/\alpha}} \sum_{j=1}^n X_j^{(s)}\Big| \geq x\Big) d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) =$$

$$= \int\limits_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \mathsf{P}(N_1(\lambda)=n)\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{1}{b(t)t^{1/\alpha}}\Big[\Big(\sum_{j=1}^n X_j - at\Big) -$$

$$-\Big(\sum_{j=1}^n X'_j - at\Big)\Big]\Big| \geq x\Big) d\mathsf{P}(\Lambda(t)<\lambda) \leq$$

$$\leq 2\int\limits_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \mathsf{P}(N_1(\lambda)=n)\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{1}{b(t)t^{1/\alpha}}\Big(\sum_{j=1}^n X_j - at\Big)\Big| \geq \frac{x}{2}\Big) d\mathsf{P}(\Lambda(t)<\lambda) =$$

$$= 2\int\limits_0^\infty \mathsf{P}\Big(\Big|\frac{1}{b(t)t^{1/\alpha}}\Big(\sum_{j=1}^{N_1(\lambda)} X_j - at\Big)\Big| \geq \frac{x}{2}\Big) d\mathsf{P}(\Lambda(t)<\lambda) =$$

$$= 2\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{S(t)-at}{b(t)t^{1/\alpha}}\Big| \geq \frac{x}{2}\Big).$$

Отсюда вытекает, что для любой неограниченно возрастающей последовательности $\{t_k\}_{k\geq 1}$ мы имеем

$$\lim_{x\to\infty}\sup_k \mathsf{P}(|T(t_k)|\geq x) \leq 2\lim_{x\to\infty}\sup_k \mathsf{P}\Big(\Big|\frac{S(t_k)-at_k}{b(t_k)t_k^{1/\alpha}}\Big| \geq \frac{x}{2}\Big) = 0,$$

то есть семейство $\{T(t)\}$ слабо компактно на бесконечности.

Левую q-квантиль случайной величины $N(t)$ обозначим $n_t(q)$. Пусть $\{t_k\}$ – произвольная неограниченно возрастающая последовательность. Покажем, что последовательность

$$\left\{\frac{b(N(t_k))N^{1/\alpha}(t_k)}{b(t_k)t_k^{1/\alpha}}\right\}_{k\geq 1} \tag{3.3.15}$$

содержит слабо сходящуюся подпоследовательность. Это и будет означать, что семейство (3.3.14) слабо компактно на бесконечности. С этой целью убедимся, что для любого $q\in(0,1)$

$$G(q) \equiv \sup_k \frac{b(n_{t_k}(q))n_{t_k}^{1/\alpha}(q)}{b(t_k)t_k^{1/\alpha}} < \infty. \tag{3.3.16}$$

Используя неравенство Леви (см., например, (Лоэв, 1962), раздел 17.1)

$$\mathsf{P}\Big(\max_{1\leq r\leq n}\Big|\sum_{j=1}^r X_j^{(s)}\Big| \geq x\Big) \leq 2\mathsf{P}\Big(\Big|\sum_{j=1}^n X_j^{(s)}\Big| \geq x\Big),$$

справедливое для любых независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ и любого $n \geq 1$, мы получим

$$\mathsf{P}(|T(t_k)| \geq x) = \mathsf{P}\Big(\Big|\frac{1}{b(t_k)t_k^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{N(t_k)} X_j^{(s)}\Big| \geq x\Big) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(N(t_k) = n)\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{1}{b(t_k)t_k^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{n} X_j^{(s)}\Big| \geq x\Big) \geq$$

$$\geq \sum_{n > n_{t_k}(q)} \mathsf{P}(N(t_k) = n)\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{1}{b(t_k)t_k^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{n} X_j^{(s)}\Big| \geq x\Big) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\sum_{n > n_{t_k}(q)} \mathsf{P}(N(t_k) = n)\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{1}{b(t_k)t_k^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{n_{t_k}(q)} X_j^{(s)}\Big| \geq x\Big) \geq$$

$$\geq \frac{1-q}{2} \cdot \mathsf{P}\Big(\Big|\frac{1}{b(t_k)t_k^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{n_{t_k}(q)} X_j^{(s)}\Big| \geq x\Big).$$

Таким образом, вследствие слабой компактности последовательности $\{T(t_k)\}_{k\geq 1}$, при каждом $q \in (0,1)$ последовательность функций распределений

$$F_k^{(q)}(x) = \mathsf{P}\Big(\frac{1}{b(t_k)t_k^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{n_{t_k}(q)} X_j^{(s)} < x\Big) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

слабо компактна. Предположим, что (3.3.16) не имеет места. В таком случае существуют $q_0 \in (0,1)$ и последовательность $\mathcal{K}$ натуральных чисел такие, что

$$\frac{b(n_{t_k}(q_0))n_{t_k}^{1/\alpha}(q_0)}{b(t_k)t_k^{1/\alpha}} \longrightarrow \infty \quad (k \to \infty,\ k \in \mathcal{K}). \tag{3.3.17}$$

Но $N(t) \xrightarrow{P} \infty$ при $t \to \infty$ по Лемме 3.2.2 вследствие условия $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$. Поэтому $n_{t_k}(q_0) \to \infty$ при $k \to \infty$, $k \in \mathcal{K}$. Следовательно, согласно условию (3.3.3) мы имеем

$$\frac{1}{b(n_{t_k}(q_0))n_{t_k}^{1/\alpha}(q_0)}\Big(\sum_{j=1}^{n_{t_k}(q_0)} X_j - a n_{t_k}(q_0)\Big) \Longrightarrow Y_\alpha \quad (k \to \infty,\ k \in \mathcal{K}). \tag{3.3.18}$$

Пусть Y'_α – случайная величина, независимая от Y_α и такая, что $Y_\alpha \stackrel{d}{=} Y'_\alpha$. Функцию распределения $F_k^{(q_0)}(x)$ можно записать в виде

$$F_k^{(q_0)}(x) = \mathsf{P}\Big(\frac{1}{b(n_{t_k}(q_0))n_{t_k}^{1/\alpha}(q_0)}\Big(\sum_{j=1}^{n_{t_k}(q_0)} X_j - an_{t_k}(q_0)\Big) -$$

$$-\frac{1}{b(n_{t_k}(q_0))n_{t_k}^{1/\alpha}(q_0)}\Big(\sum_{j=1}^{n_{t_k}(q_0)} X'_j - an_{t_k}(q_0)\Big) < \frac{xb(t_k)t_k^{1/\alpha}}{b(n_{t_k}(q_0))n_{t_k}^{1/\alpha}(q_0)}\Big).$$

Из (3.3.17) и (3.3.18) вытекает, что, каким бы ни было $x \in \mathbb{R}$,

$$F_k^{(q_0)}(x) \to \mathsf{P}(Y_\alpha - Y'_\alpha < 0) = \frac{1}{2} \qquad (k \to \infty,\ k \in \mathcal{K}),$$

но это противоречит слабой компактности последовательности функций распределения $\{F_k^{(q_0)}(x)\}_{k\geq 1}$, установленной выше. Это противоречие доказывает (3.3.16). Легко видеть, что $N(t) \stackrel{d}{=} n_t(U)$, где U – случайная величина с равномерным распределением на $[0,1]$. Поэтому, используя (3.3.16), мы имеем

$$\mathsf{P}\Big(\frac{b(N(t_k))N^{1/\alpha}(t_k)}{b(t_k)t_k^{1/\alpha}} \geq x\Big) = \mathsf{P}\Big(\frac{b(n_{t_k}(U))n_{t_k}^{1/\alpha}(U)}{b(t_k)t_k^{1/\alpha}} \geq x\Big) =$$

$$= \int_0^1 \mathsf{P}\Big(\frac{b(n_{t_k}(u))n_{t_k}^{1/\alpha}(u)}{b(t_k)t_k^{1/\alpha}} \geq x\Big)du \leq \int_0^1 \mathsf{P}(G(u) \geq x)du = \mathsf{P}(G(U) \geq x).$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty}\sup_k \mathsf{P}\Big(\frac{b(N(t_k))N^{1/\alpha}(t_k)}{b(t_k)t_k^{1/\alpha}} \geq x\Big) \leq \lim_{x\to\infty} \mathsf{P}(G(U) \geq x) = 0.$$

Это означает, что последовательность (3.3.15) слабо компактна. Но так как последовательность $\{t_k\}_{k\geq 1}$ произвольна, это означает, что семейство (3.3.14) слабо компактно на бесконечности.

Теперь докажем, что семейство (3.3.13) слабо компактно на бесконечности. Имеем очевидное соотношение

$$\frac{b(\Lambda(t))\Lambda^{1/\alpha}(t)}{b(t)t^{1/\alpha}} = \frac{b(\Lambda(t))\Lambda^{1/\alpha}(t)}{b(N(t))N^{1/\alpha}(t)} \cdot \frac{b(N(t))N^{1/\alpha}(t)}{b(t)t^{1/\alpha}}.$$

Поэтому слабая компактность на бесконечности семейства (3.3.13) будет вытекать из установленной выше слабой компактности на бесконечности семейства (3.3.14), если мы убедимся, что

$$\frac{b(\Lambda(t))\Lambda^{1/\alpha}(t)}{b(N(t))N^{1/\alpha}(t)} \Longrightarrow 1 \quad (t\to\infty).(\tag{3.3.19}$$

Докажем (3.3.19). Для произвольного $\epsilon > 0$ имеем

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{b(N(t))N^{1/\alpha}(t)}{b(\Lambda(t))\Lambda^{1/\alpha}(t)} - 1\Big| > \epsilon\Big) =$$

$$= \int\limits_0^\infty \mathsf{P}\Big(\Big|\frac{b(N_1(\lambda))N_1^{1/\alpha}(\lambda)}{b(\lambda)\lambda^{1/\alpha}} - 1\Big| > \epsilon\Big) d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda).$$

Поэтому, воспользовавшись соотношениями (3.3.7) и (3.3.8), мы приходим к неравенствам

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{b(N(t))N^{1/\alpha}(t)}{b(\Lambda(t))\Lambda^{1/\alpha}(t)} - 1\Big| > \epsilon\Big) \le$$

$$\le \int\limits_0^\infty \mathsf{P}\Big(\Big|\Big(\frac{N_1(\lambda)}{\lambda}\Big)^{1/\alpha}\Big(\frac{b(N_1(\lambda))}{b(\lambda)} - 1\Big)\Big| > \frac{\epsilon}{2}\Big) d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \mathsf{P}\Big(\Big|\Big(\frac{N_1(\lambda)}{\lambda}\Big)^{1/\alpha} - 1\Big| > \frac{\epsilon}{2}\Big) d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) \le$$

$$\le \int\limits_0^\infty \mathsf{P}\left(\sup_{\frac{1}{2}\le p\le\frac{3}{2}}\left|\frac{b(\lambda p)}{b(\lambda)} - 1\right| > \frac{2^{1/\alpha-1}\epsilon}{3^{1/\alpha}}\right) d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \mathsf{P}\left(\left|\frac{N_1(\lambda)}{\lambda} - 1\right| > \frac{1}{2}\right) d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \mathsf{P}\Big(\Big|\Big(\frac{N_1(\lambda)}{\lambda}\Big)^{1/\alpha} - 1\Big| > \frac{\epsilon}{2}\Big) d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda). \tag{3.3.20}$$

Согласно уже упоминавшейся Теореме 1.1 в (Сенета, 1985), существует $\lambda_0 \in (0,\infty)$ такое, что для всех $\lambda > \lambda_0$

$$\mathsf{P}\left(\sup_{\frac{1}{2}\le p\le\frac{3}{2}}\left|\frac{b(\lambda p)}{b(\lambda)} - 1\right| > \frac{2^{1/\alpha-1}\epsilon}{3^{1/\alpha}}\right) = 0$$

(см. соотношение (3.3.9)). Поэтому для первого слагаемого в правой части (3.3.20) справедлива оценка

$$\int_0^\infty \mathsf{P}\left(\sup_{\frac{1}{2}\le p\le\frac{3}{2}}\left|\frac{b(\lambda p)}{b(\lambda)}-1\right| > \frac{2^{1/\alpha-1}\epsilon}{3^{1/\alpha}}\right) d\mathsf{P}(\Lambda(t)<\lambda) \ \le\ \mathsf{P}(\Lambda(t)\le\lambda_0).$$

Более того, поскольку $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ при $t\to\infty$, для произвольно малого $\delta>0$ найдется такое t_1, что для всех $t\ge t_1$ выполнено неравенство

$$\mathsf{P}(\Lambda(t)\le\lambda_0) \ <\ \delta. \tag{3.3.21}$$

Далее, хорошо известно свойство асимптотической вырожденности пуассоновского процесса:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{N_1(\lambda)}{\lambda}-1\Big|>\epsilon\Big) \ =\ 0$$

для любого $\epsilon>0$. Поэтому для указанного выше произвольно малого $\delta>0$ найдется число $\lambda_1\in(0,\infty)$ такое, что

$$\int_0^\infty \mathsf{P}\left(\left|\frac{N_1(\lambda)}{\lambda}-1\right|>\frac{1}{2}\right) d\mathsf{P}(\Lambda(t)<\lambda)\ +$$

$$+\ \int_0^\infty \mathsf{P}\Big(\Big|\left(\frac{N_1(\lambda)}{\lambda}\right)^{1/\alpha}-1\Big|>\frac{\epsilon}{2}\Big)d\mathsf{P}(\Lambda(t)<\lambda)\ \le$$

$$\le\ \mathsf{P}(\Lambda(t)\le\lambda_1)\ +\ \delta. \tag{3.3.22}$$

Опять воспользовавшись условием неограниченного возрастания $\Lambda(t)$ по вероятности при $t\to\infty$, заметим, что найдется $t_2\in(0,\infty)$ такое, что для всех $t\ge t_2$

$$\mathsf{P}(\Lambda(t)\le\lambda_1)\ <\ \delta. \tag{3.3.23}$$

Таким образом, из (3.3.21), (3.3.22) и (3.3.23) вытекает, что для $t\ge\max\{t_1,t_2\}$

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{b(N(t))N^{1/\alpha}(t)}{b(\Lambda(t))\Lambda^{1/\alpha}(t)}-1\Big|>\epsilon\Big)\ <\ 3\delta.$$

Но в силу произвольности ϵ и δ последнее неравенство означает справедливость соотношения (3.3.19), и, следовательно, слабую компактность семейства (3.3.13) на бесконечности, которую и требовалось установить.

Теперь мы можем непосредственно применить Лемму 3.2.1 с

$$X(t) = S_0(t), \quad A(t) = C(t) = at,$$

$$B(t) = D(t) = b(t)t^{1/\alpha}, \quad M(t) = \Lambda(t).$$

Обозначим левую q-квантиль случайной величины $\Lambda(t)$ через $l_t(q)$. В силу условия 3 Леммы 3.2.1 и слабой компактности на бесконечности семейства $\{V(t)\}_{t>0}$ семейство случайных величин

$$\Big\{\frac{A(\Lambda(t)) - C(t)}{D(t)} = \frac{a(\Lambda(t) - t)}{b(t)t^{1/\alpha}}\Big\}_{t\geq 0}$$

слабо компактно на бесконечности. Следовательно, для каждого $q \in (0,1)$

$$\limsup_{t\to\infty}\Big|\frac{a(l_t(q) - t)}{b(t)t^{1/\alpha}}\Big| \equiv H(q) < \infty.$$

Поэтому для произвольного $q \in (0,1)$ мы имеем

$$\limsup_{t\to\infty}\Big|\frac{l_t(q)}{t} - 1\Big| = \limsup_{t\to\infty}\Big|\frac{a(l_t(q) - t)}{b(t)t^{1/\alpha}}\Big| \cdot \frac{b(t)t^{1/\alpha}}{t|a|} \leq$$

$$\leq \frac{H(q)}{|a|}\limsup_{t\to\infty} b(t)t^{(1-\alpha)/\alpha} = 0 \tag{3.3.24}$$

по свойству медленно меняющихся функций. Из (3.3.24) вытекает, что

$$\frac{\Lambda(t)}{t} \Longrightarrow 1 \quad (t \to \infty). \tag{3.3.25}$$

Соотношение (3.3.25) влечет

$$\frac{B(M(t))}{D(t)} \equiv \frac{b(\Lambda(t))\Lambda^{1/\alpha}(t)}{b(t)t^{1/\alpha}} \Longrightarrow 1 \quad (t \to \infty). \tag{3.3.26}$$

В этом можно убедиться точно так же, как было доказано соотношение (3.3.6), заменив лишь в приведенном выше доказательстве процесс $N_1(t)$ процессом $\Lambda(t)$, а условие $N_1(t)/t \Longrightarrow 1$ условием (3.3.25).

Соотношения (3.3.4) и (3.3.26) означают, что тройки случайных величин $(Y(t), U(t), V(t))$, фигурирующие в Лемме 3.2.1, имеют специальный вид, а именно,

$$Y(t) \;=\; Y_\alpha, \quad U(t) \;=\; 1.$$

При этом условие 1 Леммы 3.2.1 примет вид

$$Z \;\stackrel{d}{=}\; Y_\alpha + V(t). \tag{3.3.27}$$

Переписав условие (3.3.27) в терминах характеристических функций:

$$\mathsf{E}\exp\{isZ\} \;\equiv\; f_{Y_\alpha}(s)\cdot \mathsf{E}\exp\{isV(t)\}, \tag{3.3.28}$$

заметим, что устойчивая характеристическая функция $f_{Y_\alpha}(s)$ безгранично делима и, стало быть, нигде не обращается в нуль (см., например, (Гнеденко и Колмогоров, 1949)). Поэтому уравнение (3.3.28) относительно $\mathsf{E}\exp\{isV(t)\}$ имеет не более одного решения в классе характеристических функций. Таким образом, условие 3 Леммы 3.2.1 в рассматриваемом случае принимает вид (3.3.3). Тем самым необходимость условий Теоремы 3.3.1 доказана.

Докажем **достаточность** этих условий. Соотношение (3.3.3) влечет (3.3.24), откуда вытекает соотношение (3.3.25), гарантирующее, в свою очередь, выполнение соотношения (3.3.26). Теперь утверждение теоремы непосредственно вытекает из Леммы 3.2.1. Теорема полностью доказана.

Из Теоремы 3.3.1 вытекает следующий практический вывод. При больших значениях t имеет место следующие приближенные равенства по распределению:

$$S(t) \;\approx\; b(t)t^{1/\alpha}Y_\alpha + a\Lambda(t) \;\approx\; b(t)t^{1/\alpha}(V + Y_\alpha) + at,$$

причем слагаемые в правой части независимы. Другими словами, если обозначить $F_t(x) = \mathsf{P}(\Lambda(t) < x)$, $Q(x) = \mathsf{P}(V < x)$, то при каждом $x \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{P}(S(t) < x) \;\approx\; G_\alpha\Big(\frac{x}{b(t)t^{1/\alpha}}\Big) * F_t\Big(\frac{x}{a}\Big) \;\approx\; (G_\alpha * Q)\Big(\frac{x - at}{b(t)t^{1/\alpha}}\Big).$$

3.4 Оценки скорости сходимости обобщенных процессов Кокса с большими скачками

Обозначим

$$F_t^{(N)}(x) = \mathsf{P}\left(\frac{a(N(t)-t)}{b(t)t^{1/\alpha}} < x\right), \qquad F_t^{(\Lambda)}(x) = \mathsf{P}\left(\frac{a(\Lambda(t)-t)}{b(t)t^{1/\alpha}} < x\right),$$

$$\Delta_n \;=\; \rho_H\left(\mathsf{P}\left(\frac{S_n - a_n}{b_n} < x\right),\, G_\alpha(x)\right).$$

Следующая лемма представляет собой частный случай Теоремы 2.5.1.

Лемма 3.4.1. *Пусть $\alpha \in (1,2)$. Тогда для любого $\epsilon \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$\rho_H\left(\mathsf{P}\left(\frac{S(t)-at}{b(t)t^{1/\alpha}} < x\right),\, (G_\alpha * F_t^{(N)})(x)\right) \;\le\; \mathsf{E}[\Delta_{N(t)}\mathbf{1}(N(t)\in\mathcal{N}_\epsilon)]+$$

$$+\max\left\{\frac{1}{\epsilon},\, \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\right\}\mathsf{E}\min\left\{\epsilon,\, \left|\frac{b(N(t))N^{1/\alpha}(t)}{b(t)t^{1/\alpha}} - 1\right|\right\},$$

где

$$\mathcal{N}_\epsilon \;=\; \mathcal{N}_\epsilon(t) \;=\; \{n:\, |b(n)n^{1/\alpha} - b(t)t^{1/\alpha}| \le \epsilon b(t)t^{1/\alpha}\},$$

$G_\alpha(x)$ *– функция распределения случайной величины Y_α, $C_(\alpha)$ определена в Главе 2.*

Для оценки первого слагаемого в правой части неравенства Леммы 3.4.1 требуется оценка величины

$$\sup_x\left|\mathsf{P}\left(\frac{S_n - an}{bn^{1/\alpha}} < x\right) - G_\alpha(x)\right|,$$

которая приведена в Теореме 2.4.1.

Мы будем считать, что $b(t) \equiv b > 0$. Это соответствует ситуации, в которой общая функция распределения слагаемых $X_1, X_2, \ldots$ принадлежит области *нормального* притяжения устойчивого закона G_α. Легко видеть, что в таком случае

$$\mathcal{N}_\epsilon = \mathcal{N}_\epsilon(t) = \{n:\, t(1-\epsilon)^\alpha \le n \le t(1+\epsilon)^\alpha\}.$$

Несложно убедиться, что для любых распределений H, F_1 и F_2

$$\rho_H(F_1,\, F_2) \;\le\; \rho(F_1,\, F_2).$$

Поэтому из Теоремы 2.4.1 вытекает, что

$$\mathsf{E}[\Delta_{N(t)}\mathbf{1}(N(t)\in\mathcal{N}_\epsilon)] \ \le$$

$$\le C_0(\alpha,r)\max\{\nu_r,\nu_r^{1/(r+1)}\}\sum_{n\ge\theta(1-\epsilon)^\alpha}\frac{\mathsf{P}(N(t)=n)}{n^{(r-\alpha)/\alpha}} \ \le$$

$$\le \ \frac{C_0(\alpha,r)}{(1-\epsilon)^\alpha}\cdot\frac{\max\{\nu_r,\nu_r^{1/(r+1)}\}}{t^{(r-\alpha)/\alpha}}.$$

Пусть N_λ – пуассоновская случайная величина с параметром λ. С помощью элементарных рассуждений можно убедиться, что

$$|x^{1/\alpha}-1| \ \le \ |x-1|$$

при любых $\alpha\in(1,2)$ и $x\ge 0$. Следовательно, учитывая, что $\mathsf{E}\Lambda(t)=t$, и используя неравенство Иенсена, мы получаем

$$\mathsf{E}\min\left\{\left|\frac{N^{1/\alpha}(t)}{t^{1/\alpha}}-1\right|,\,\epsilon\right\}\le$$

$$\le\mathsf{E}\min\left\{\left|\frac{N(t)}{t}-1\right|,\,\epsilon\right\}=\int\limits_0^\infty\mathsf{E}\left|\frac{N_\lambda}{t}-1\right|d\mathsf{P}(\Lambda(t)<\lambda)\le$$

$$\le\frac{1}{t}\int\limits_0^\infty\mathsf{E}|N_\lambda-\lambda|d\mathsf{P}(\Lambda(t)<\lambda)+\frac{1}{t}\int\limits_0^\infty|\lambda-t|d\mathsf{P}(\Lambda(t)<\lambda)\le$$

$$\le\frac{1}{t}\int\limits_0^\infty\sqrt{\mathsf{D}N_\lambda}d\mathsf{P}(\Lambda(t)<\lambda)+\mathsf{E}|\frac{\Lambda(t)}{t}-1|=$$

$$=\frac{\mathsf{E}\sqrt{\Lambda(t)}}{t}+\mathsf{E}|\frac{\Lambda(t)}{t}-1|\le\frac{1}{\sqrt{t}}+\mathsf{E}|\frac{\Lambda(t)}{t}-1|.$$

Комбинируя эти оценки с Леммой 3.4.1, мы приходим к следующему результату.

Лемма 3.4.2. *Пусть $\alpha\in(1,2)$ и соотношение (2.4.1) выполнено при $\alpha<r\le 1+\alpha$. Тогда для любых $t>0$ и $\epsilon\in(0,1)$ справедлива оценка*

$$\rho_H\left(\mathsf{P}\left(\frac{S(t)-at}{b(t)t^{1/\alpha}}<x\right),\,(G_\alpha*F_t^{(N)})(x)\right) \ \le$$

$$\le \ \frac{C_0(\alpha,r)}{(1-\epsilon)^\alpha}\cdot\frac{\max\{\nu_r,\nu_r^{1/(r+1)}\}}{t^{(r-\alpha)/\alpha}}+\max\left\{\frac{1}{\epsilon},\,\frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\right\}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{t}}+\mathsf{E}\left|\frac{\Lambda(t)}{t}-1\right|\right],$$

где $C_0(\alpha, r)$ – константа из Теоремы 2.4.1, а $C(\alpha)$ определена в Лемме 3.4.1.

В данном разделе мы, предполагая, что $\mathsf{E}\Lambda(t) \equiv t$, а случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ удовлетворяют условию (2), рассмотрим оценки скорости сходимости одномерных распределений процесса

$$Z(t) \ = \ \frac{S(t) - at}{bt^{1/\alpha}}$$

к свертке $G_\alpha * \widehat{F}$, где $\widehat{F}(x)$ – функция распределения случайной величины V такой, что

$$\frac{a(N(t) - t)}{bt^{1/\alpha}} \Longrightarrow V \quad (t \to \infty).$$

По неравенству треугольника с использованием легко проверяемого соотношения

$$\rho_H(G_\alpha * F_t^{(N)}, G_\alpha * \widehat{F}) \ \leq \ \rho_H(F_t^{(N)}, \widehat{F})$$

мы имеем

$$\rho_H(\mathsf{P}(\frac{S(t) - at}{b(t)t^{1/\alpha}} < x), (G_\alpha * \widehat{F})(x)) \ \leq$$

$$\leq \ \rho_H(\mathsf{P}(\frac{S(t) - at}{b(t)t^{1/\alpha}} < x), (G_\alpha * F_t^{(N)})(x)) \ + \ \rho_H(F_t^{(N)}, \widehat{F}). \tag{3.4.1}$$

Первое слагаемое в правой части (3.4.1) мы можем оценить с помощью Леммы 3.4.2. Рассмотрим второе слагаемое. Имеем

$$\rho_H(F_t^{(N)}, \widehat{F}) \ \leq \ \rho_H(F_t^{(N)}, F_t^{(\Lambda)}) \ + \ \rho_H(F_t^{(\Lambda)}, \widehat{F}). \tag{3.4.2}$$

Но второе слагаемое в правой части последнего неравенства непосредственно связано с критерием сходимости в Теореме 3.1.1. Поэтому для того, чтобы получить естественную оценку скорости сходимости распределений обобщенных процессов Кокса с большими скачками, нам достаточно найти разумную оценку для первого слагаемого в правой части (3.4.2).

Для произвольного $\delta \in (0, 1)$ мы имеем

$$\rho_H(F_t^{(N)}, F_t^{(\Lambda)}) \ \leq$$

$$\leq \ \sup_x \int\limits_0^\infty |H(x) * [\mathsf{P}(\frac{a(N_\lambda - t)}{bt^{1/\alpha}} < x) - E_{a(\lambda - t)/(bt^{1/\alpha})}(x)]| d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) \ \leq$$

$$\leq \mathsf{P}(\Lambda(t) \leq \delta t) +$$

$$+ \sup_x \int_{\delta t}^{\infty} |H(x) * [\mathsf{P}(\frac{a(N_\lambda - t)}{bt^{1/\alpha}} < x) - E_{a(\lambda-t)/(bt^{1/\alpha})}(x)]| d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) \equiv$$

$$\equiv I_1 + I_2.$$

При этом

$$I_1 = \mathsf{P}(\frac{\Lambda(t)}{t} < \delta) = \mathsf{P}(\frac{\Lambda(t)}{t} - 1 < -(1-\delta)) \leq$$

$$\leq \mathsf{P}(|\frac{\Lambda(t)}{t} - 1| > 1 - \delta) \leq \frac{1}{1-\delta} \mathsf{E}|\frac{\Lambda(t)}{t} - 1|. \tag{3.4.3}$$

Рассмотрим I_2. Имеем

$$I_2 \leq \int_{\delta t}^{\infty} \sup_x |H(x) * [\mathsf{P}(\frac{N_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < \frac{bt^{1/\alpha} x}{a\sqrt{\lambda}} - \frac{(\lambda - t)}{\sqrt{\lambda}}) -$$

$$- \Phi(\frac{bt^{1/\alpha} x}{a\sqrt{\lambda}} - \frac{(\lambda - t)}{\sqrt{\lambda}})]| d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) +$$

$$+ \int_{\delta t}^{\infty} \sup_x |H(x) * [\Phi(\frac{bt^{1/\alpha} x}{a\sqrt{\lambda}} - \frac{(\lambda - t)}{\sqrt{\lambda}}) - E_{a(\lambda-t)/(bt^{1/\alpha})}(x)]| d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) \equiv$$

$$\equiv I_{21} + I_{22}.$$

С помощью неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм (Теорема 1.1.4) мы получаем оценку для I_{21}:

$$I_{21} \leq C_0 \int_{\delta t}^{\infty} \frac{d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda)}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{C_0}{\sqrt{\delta t}}, \tag{3.4.4}$$

где $C_0 < 0.7655$ – абсолютная постоянная.

Рассмотрим I_{22}. Используя известное соотношение между метрикой Леви и равномерной метрикой

$$\rho_H(F_1, F_2) \leq (1 + C_H) L(F_1, F_2),$$

справедливое для любых функций распределения F_1 и F_2, где $C_H = \sup_x H'(x)$, мы получаем

$$I_{22} = \int\limits_{\delta t}^{\infty} \sup_x |H(x) * [\Phi(\frac{bt^{1/\alpha}x}{a\sqrt{\lambda}}) * E_{a(\lambda-t)/(bt^{1/\alpha})}(x) -$$

$$- (E_0 * E_{a(\lambda-t)/(bt^{1/\alpha})})(x)]| d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) \leq$$

$$\leq (1 + C_H) \int\limits_{\delta t}^{\infty} L(\Phi(\frac{bt^{1/\alpha}x}{a\sqrt{\lambda}}) * E_{a(\lambda-t)/(bt^{1/\alpha})}(x),$$

$$(E_0 * E_{a(\lambda-t)/(bt^{1/\alpha})})(x)) d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda) \leq$$

$$\leq (1 + C_H) \int\limits_{\delta t}^{\infty} L(\Phi(\frac{bt^{1/\alpha}x}{a\sqrt{\lambda}}),\, E_0(x)) d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda).$$

Таким образом, чтобы завершить построение искомой оценки, нам осталось найти подходящую оценку в терминах σ для $L(\Phi(x/\sigma),\, E_0(x))$. Используя геометрический смысл расстояния Леви как стороны наибольшего квадрата, который можно вписать между графиками функций распределения $\Phi(x/\sigma)$ и $E_0(x)$, мы замечаем, что величина $L(\Phi(x/\sigma),\, E_0(x))$ равна корню x_σ уравнения

$$1 - \Phi(x/\sigma) = x. \tag{3.4.5}$$

При этом, если известна удобная оценка вида

$$1 - \Phi(x/\sigma) \leq \Psi(x), \tag{3.4.6}$$

то решение x_σ уравнения (3.4.5) оценивается сверху решением уравнения

$$\Psi(x) = x. \tag{3.4.7}$$

В качестве оценки (3.4.6) возьмем, например, неравенство

$$1 - \Phi(x/\sigma) \leq \frac{(2k-1)!!\sigma^{2k}}{x^{2k}},$$

справедливое при любом $k \geq 1$. Тогда уравнение (3.4.7) примет вид

$$\frac{(2k-1)!!\sigma^{2k}}{x^{2k}} = x,$$

откуда

$$x_\sigma \;\leq\; [(2k-1)!!\sigma^{2k}]^{1/(2k+1)}.$$

В нашем случае

$$\sigma = \frac{a\sqrt{\lambda}}{bt^{1/\alpha}}.$$

Поэтому

$$L(\Phi(\frac{bt^{1/\alpha}x}{a\sqrt{\lambda}}),\ E_0(x)) \le [(2k-1)!!]^{1/(2k+1)}(\frac{a}{bt^{1/\alpha}})^{2k/(2k+1)}\lambda^{k/(2k+1)},$$

откуда, используя неравенство Иенсена с учетом того, что $\mathsf{E}\Lambda(t) = t$, мы получим

$$I_{22} \le [(2k-1)!!]^{1/(2k+1)}(1+C_H)(\frac{a}{bt^{1/\alpha}})^{2k/(2k+1)}\int\limits_{\delta t}^{0}\lambda^{k/(2k+1)}d\mathsf{P}(\Lambda(t)<\lambda) \le$$

$$\le [(2k-1)!!]^{1/(2k+1)}(1+C_H)(\frac{a}{bt^{1/\alpha}})^{2k/(2k+1)}\mathsf{E}(\Lambda(t))^{k/(2k+1)} \le$$

$$\le [(2k-1)!!]^{1/(2k+1)}(1+C_H)(\frac{a}{b})^{2k/(2k+1)}\frac{1}{t^{k(2-\alpha)/(2k+1)}}. \qquad (3.4.8)$$

Теперь, комбинируя оценки (3.4.2), (3.4.3), (3.4.4) и (3.4.8) с Леммой 3.4.2, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 3.4.1. *Пусть $\mathsf{E}\Lambda(t) = t$, $\alpha \in (1,2)$ и соотношение (2.4.1) выполнено при $\alpha < r \le 1+\alpha$. Тогда для любого натурального k, любых $t > 0$, $\delta \in (0,1)$ и $\epsilon \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$\rho_H\left(\mathsf{P}\left(\frac{S(t)-at}{b(t)t^{1/\alpha}} < x\right),\ (G_\alpha * \widehat{F})(x)\right) \ \le\ K_1(\alpha,r,\epsilon)\frac{\max\{\nu_r,\nu_r^{1/(r+1)}\}}{t^{(r-\alpha)/\alpha}} +$$

$$+K_2(\alpha,\epsilon,\delta)\frac{1}{\sqrt{t}} + K_3(k,b,a)\frac{1}{t^{k(2-\alpha)/(2k+1)}} +$$

$$+K_4(\alpha,\epsilon,\delta)\mathsf{E}\left|\frac{\Lambda(t)}{t} - 1\right| + \rho_H(F_t^{(\Lambda)},\ \widehat{F}),$$

где

$$K_1(\alpha,r,\epsilon) = \frac{C_0(\alpha,r)}{(1-\epsilon)^\alpha}, \quad K_2(\alpha,\epsilon,\delta) = \max\left\{\frac{1}{\epsilon},\ \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\right\} + \frac{C_0}{\sqrt{\delta}},$$

$$K_3(k,b,a) = [(2k-1)!!]^{1/(2k+1)}(1+C_H)(\frac{a}{b})^{2k/(2k+1)},$$

$$K_4(\alpha, \epsilon, \delta) = \max\left\{\frac{1}{\epsilon}, \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\right\} + \frac{1}{1-\delta},$$

C_0 – абсолютная постоянная из неравенства Берри-Эссеена, $C_0 < 0.7655$, $C_0(\alpha, r)$ – константа из Теоремы 2.4.1, а $C(\alpha)$ определена в Лемме 3.4.1.

Замечание 3.4.1. Из доказательства Теоремы 2.1.1 вытекает, что при $b(t) \equiv b > 0$ каждое из условий (3.3.1) и (3.3.3) влечет

$$\frac{\Lambda(t)}{t} \Longrightarrow 1 \quad (t \to \infty).$$

Это обстоятельство оправдывает присутствие слагаемого вида $\mathsf{E}|\Lambda(t)/t - 1|$ в оценке, устанавливаемой Теоремой 3.4.2.

4

Асимптотическое поведение обобщенных процессов риска при возможности больших выплат

4.1 Обобщенные процессы риска.

Напомним определение обобщенного процесса риска. *Классическим процессом риска* принято называть процесс вида

$$R_0^{(\lambda)}(t) = ct - \sum_{j=1}^{N_\lambda(t)} X_j \qquad (t \geq 0), \tag{4.1.1}$$

где $c > 0$ – интенсивность поступления страховых взносов (премий), $\{X_j\}_{j\geq 1}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathsf{E}X_j = a \in (0, \infty)$, имеющие смысл размеров страховых выплат, $N_\lambda(t)$ – однородный пуассоновский процесс с некоторой интенсивностью $\lambda > 0$, независимый от $\{X_j\}_{j\geq 1}$ и имеющий смысл количества страховых случаев до момента времени t. Процесс $R_0^{(\lambda)}(t)$ имеет смысл (остаточного) капитала страховой компании в момент времени t. Свойства классического процесса риска подробно рассмотрены, например, в (Бенинг и Королев, 2000b), где можно найти дальнейшие ссылки.

Понятно, что модель классического процесса риска не учитывает флуктуацию интенсивности поступления страховый премий и флуктуацию интенсивности потока выплат, так как эти флуктуации постоянны. Подходящей моделью для учета флуктуаций являются обобщенные процессы риска, которые являются обобщением классического процесса риска (4.1.1).

Пусть $N_1(t)$, $t \geq 0$, – стандартный пуассоновский процесс (однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью), а $\Lambda(t)$, $t \geq 0$, – независимый от $N_1(t)$ случайный процесс с неубывающими, почти наверное конечными непрерывными справа траекториями, выходящими из нуля. Пусть

$$N(t) = N_1(\Lambda(t)) \qquad (t \geq 0),$$

– дважды стохастический пуассоновский процесс, иначе называемый процессом Кокса, управляемый процессом $\Lambda(t)$. В дальнейшем мы будем предполагать, что процессы $\Lambda(t)$ и $N(t)$ независимы от последовательности $\{X_j\}_{j\geq 1}$. Рассмотрим процесс риска вида

$$R(t) = c\Lambda(t) - \sum_{j=1}^{N_1(\Lambda(t))} X_j \qquad (t \geq 0), \tag{4.1.2}$$

где при каждом $t > 0$ случайные величины $\Lambda(t)$ и $N(t)$ независимы от независимых одинаково распределенных (неотрицательных) случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ Модель (4.1.2) учитывает непостоянство интенсивности процесса заключения страховых договоров, поскольку можно считать, что в модели (4.1.2) среднее число выплат $N(t)$ пропорционально количеству страховых договоров в портфеле страховой компании, которое, в свою очередь, пропорционально $\Lambda(t)$.

Процесс $R(t)$ называется *обобщенным процессом риска*, порожденным последовательностью $\{X_j\}_{j\geq 1}$ и управляемым процессом $\Lambda(t)$.

Асимптотическое поведение обобщенных процессов риска (4.1.2) при $t \to \infty$ в случае, когда страховые требования $X_1, X_2, \ldots$ имеют конечные дисперсии, рассмотрено в (Бенинг и Королев, 2000b), (Bening and Korolev, 2002). В частности, в упомянутых книгах приведен следующий результат.

Теорема 4.1.1. *Предположим, что* $\mathsf{E}X_1 = a \neq 0$, $0 < \mathsf{D}X_1 = \sigma^2 < \infty$ *и* $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ *при* $t \to \infty$. *Пусть* $D(t) > 0$ *– такая функция, что* $D(t) \to \infty$ *при* $t \to \infty$. *Тогда одномерные распределения надлежащим образом центрированного и нормированного обобщенного процесса риска* $R(t)$ *слабо сходятся при* $t \to \infty$ *к распределению некоторой случайной величины* Z, *то есть*

$$\frac{-R(t) - C(t)}{D(t)} \Longrightarrow Z \qquad (t \to \infty)$$

при некоторой вещественной функции $C(t)$, тогда и только тогда, когда

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{|C(t)|}{D^2(t)}\equiv k^2<\infty$$

и существует такая случайная величина V, что

$$Z\stackrel{d}{=}k\cdot\sqrt{\frac{a^2+\sigma^2}{|a-c|}}\cdot W+V,$$

где W – случайная величина со стандартным нормальным распределением, независимая от V, и

$$L_1\Big(\frac{(a-c)\Lambda(t)-C(t)}{D(t)},V(t)\Big)\to 0\qquad(t\to\infty),$$

где распределение случайной величины $V(t)$ определяется характеристической функцией

$$\mathsf{E}\exp\{isV(t)\}=\exp\Big\{-\frac{s^2(a^2+\sigma^2)}{2|a-c|}\Big[k^2-\frac{|C(t)|}{D^2(t)}\Big]\Big\}\mathsf{E}\exp\{isV\}\qquad(s\in\mathbb{R}),$$

$L_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – метрика в пространстве случайных величин, метризующая слабую сходимость.

Цель данной главы состоит в доказательстве аналога Теоремы 4.1.1 для более широкого класса распределений страховых выплат, заменив требование существования дисперсий более общим условием.

Пусть, как и в Главе 3, общая функция распределения $F(x)$ случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ притягивается к $G(x)$ и пусть существуют $\alpha\in(1,2]$, $a\in\mathbb{R}$, медленно меняющаяся функция $b(t)$, $t>0$, невырожденная случайная величина Y_α, имеющая устойчивое распределение с коэффициентом устойчивости α, такие, что имеет место слабая сходимость (2.1.1).

Мы будем рассматривать асимптотическое поведение обобщенных процессов Кокса не при произвольном центрировании и нормировании, а при центрировании и нормировании неслучайными функциями специального вида. А именно, в соответствии с условием (2.1.1) мы будем рассматривать асимптотическое поведение случайных величин

$$Z(t)\;=\;\frac{R(t)-(c-a)t}{b(t)t^{1/\alpha}}\qquad(t\to\infty).\tag{4.1.3}$$

Оказывается, что при таком специальном виде центрирующих и нормирующих функций условия сходимости приобретают довольно простую форму.

Для доказательства основной теоремы мы будем использовать критерий слабой сходимости суперпозиций независимых случайных процессов, приведенный в Главе 3 и доказанный в (Korolev, 1996) (см. также (Gnedenko and Korolev, 1996), (Бенинг и Королев,2000b), (Bening and Korolev, 2002)).

4.2 Основная теорема об асимптотическом поведении обобщенных процессов риска при возможности больших выплат.

Теорема 4.2.1. *Предположим, что* $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ *при* $t \to \infty$*, а страховые требования* $X_1, X_2, \ldots$ *удовлетворяют условию (2.1.1). Случайные величины* $Z(t)$*, определяемые соотношением (4.1.3), сходятся по распределению к некоторой случайной величине* Z*,*

$$Z(t) \implies Z \qquad (t \to \infty), \tag{4.2.1}$$

тогда и только тогда, когда существует случайная величина V *такая, что*

$$Z \stackrel{d}{=} -Y_\alpha + V, \tag{4.2.2}$$

причем случайные величины Y_α *и* V *в правой части (4.2.2) независимы, и*

$$\frac{(c-a)(\Lambda(t)-t)}{b(t)t^{1/\alpha}} \implies V \quad (t \to \infty). \tag{4.2.3}$$

Доказательство теоремы почти полностью повторяет доказательство Теоремы 3.1.1. При доказательстве необходимости так же, как и в Теореме 3.1.1, применяется критерий слабой сходимости суперпозиции независимых случайных процессов, представленный Леммой 3.2.1, поскольку

$$R(t) = R_0^{(1)}(\Lambda(t)),$$

полагая

$$X(t) = R_0^{(1)}(t), \quad A(t) = C(t) = (c-a)t,$$
$$B(t) = D(t) = b(t)t^{1/\alpha}, \quad M(t) = \Lambda(t).$$

Аналогично доказывается утверждение

$$\frac{X(t)-A(t)}{B(t)} \equiv \frac{R_0^{(1)}(t)-(c-a)t}{b(t)t^{1/\alpha}} \Longrightarrow -Y_\alpha \qquad (t \to \infty), \tag{4.2.4}$$

используя доказанную сходимость (3.3.12).

Далее, поскольку устанавливается сходимость (3.3.24) и выполнено соотношение (4.2.4), то тройки случайных величин $(Y(t), U(t), V(t))$, фигурирующие в Лемме 3.2.1, имеют специальный вид, а именно

$$Y(t) = -Y_\alpha, \quad U(t) = 1.$$

При этом условие 1 Леммы 3.2.1 примет вид

$$Z \stackrel{d}{=} -Y_\alpha + V(t). \tag{4.2.5}$$

Переписав условие (4.2.5) в терминах характеристических функций:

$$\mathsf{E}\exp\{isZ\} \equiv f_{Y_\alpha}(-s)\cdot\mathsf{E}\exp\{isV(t)\}, \tag{4.2.6}$$

заметим, что устойчивая характеристическая функция $f_{Y_\alpha}(s)$ безгранично делима и, стало быть, нигде не обращается в нуль (см., например, (Гнеденко и Колмогоров, 1949)). Поэтому уравнение (4.2.6) относительно $\mathsf{E}\exp\{isV(t)\}$ имеет не более одного решения в классе характеристических функций. Таким образом, условие 3 Леммы 3.2.1 в рассматриваемом случае принимает вид (4.2.1). Тем самым необходимость условий Теоремы 4.2.1 доказана.

Доказательство достаточности теоремы аналогично доказательству достаточности в Теореме 3.3.1.

Из Теоремы 4.2.1 вытекает следующий практический вывод. При больших значениях t имеет место следующие приближенные равенства по распределению:

$$R(t) \approx -b(t)t^{1/\alpha}Y_\alpha + (c-a)\Lambda(t) \approx b(t)t^{1/\alpha}(V-Y_\alpha) + (c-a)t,$$

причем слагаемые в правой части независимы. Другими словами, если обозначить $F_t(x) = \mathsf{P}(\Lambda(t) < x)$, $Q(x) = \mathsf{P}(V < x)$, то при каждом $x \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{P}(R(t) < x) \ \approx \ [1 - G_\alpha(-\frac{x}{b(t)t^{1/\alpha}})] * F_t(\frac{x}{c-a}) \ \approx$$

$$\approx \ [1 - G_\alpha(-\frac{x-(c-a)t}{b(t)t^{1/\alpha}})] * Q(\frac{x-(c-a)t}{b(t)t^{1/\alpha}}).$$

Замечание 4.2.1. Несложно видеть, что Теорема 4.2.1, а также Теорема 3.3.1 верны не только для ситуации, в которой $N(t)$ – процесс Кокса. Она остается верной для любой ситуации, в которой страховые требования поступают в соответствии с точечным процессом $N(t) = K(\Lambda(t))$, где $K(t)$ – произвольный считающий процесс, независимый от $\Lambda(t)$, и удовлетворяющий условиям

$$\frac{K(t)}{t} \Longrightarrow 1 \qquad (t \to \infty)$$

и

$$\frac{K(t)-t}{b(t)t^{1/\alpha}} \Longrightarrow 0 \qquad (t \to \infty).$$

4.3 Обобщенные процессы риска с пакетным поступлением страховых требований.

В качестве примера применения Теоремы 4.2.1 рассмотрим ситуацию, в которой управляющий процесс $\Lambda(t)$ имеет вид

$$\Lambda(t) \ = \ \sum_{j=1}^{N_1'(t)} \Lambda_j \qquad (t \geq 0),$$

где $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, а $N_1'(t)$ – стандартный пуассоновский процесс, независимый от случайных величин $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ Такой выбор процесса $\Lambda(t)$ означает, что страховые премии увеличиваются скачкообразно в моменты $t_1, t_2, \ldots$ скачков процесса $N_1'(t)$, причем в момент t_i реализуется случайная величина Λ_i и прирост премий составляет Λ_i. Одновременно возникает пакет, состоящий из случайного числа M_i страховых требований

$$X_{M_1+\ldots+M_{i-1}+1}, \ldots, X_{M_1+\ldots+M_i}.$$

При этом условное распределение случайной величины M_i при фиксированном значении Λ_i является пуассоновским с параметром Λ_i:

$$\mathsf{P}(M_i = n|\Lambda_i) \ = \ \mathsf{P}(N_1(\Lambda_i) = n|\Lambda_i) \ = \ \frac{e^{-\Lambda_i}\Lambda_i^n}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

в то время как ее безусловное распределение является смешанным пуассоновским:

$$\mathsf{P}(M_i = n) \ = \ \mathsf{P}(N_1(\Lambda_i) = n) \ =$$

$$= \int\limits_0^\infty \exp\{-\lambda\}\frac{\lambda^n}{n!}d\mathsf{P}(\Lambda_i < \lambda) \ = \ \int\limits_0^\infty \exp\{-\lambda\}\frac{\lambda^n}{n!}d\mathsf{P}(\Lambda_1 < \lambda) \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

В силу независимости случайных величин $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ и независимости приращений процесса $N_1(t)$ случайные величины $M_1, M_2, \ldots$ независимы.

В отношении случайных величин $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ мы будем предполагать, что $\mathsf{E}\Lambda_1 = 1$ и выполнено условие, аналогичное (2.1.1):

$$\frac{\sum_{j=1}^n \Lambda_j - n}{b(n)n^{1/\alpha}} \ \Longrightarrow \ \widetilde{Y}_\alpha \quad (n \to \infty),$$

где $\widetilde{Y}_\alpha$ – устойчивая случайная величина с характеристической функцией

$$f_{\widetilde{Y}_\alpha}(s) \ = \ \exp\{i\widetilde{\gamma}s - \widetilde{d}|s|^\alpha(1 + \frac{i\widetilde{\beta}s}{|s|}\tan\frac{\pi\alpha}{2})\} \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

Тогда точно так же, как было доказано соотношение (4.2.12), можно показать, что выполнено условие

$$\frac{\Lambda(t) - t}{b(t)t^{1/\alpha}} \ \Longrightarrow \ \widetilde{Y}_\alpha \quad (t \to \infty).$$

При этом, применяя Теорему 4.2.1, мы получаем, что

$$\frac{R(t) - (c - a)t}{b(t)t^{1/\alpha}} \ \Longrightarrow \ Y_\alpha^* \qquad (t \to \infty),$$

где Y_α^* – устойчивая случайная величина с характеристической функцией

$$f_{Y_\alpha^*}(s) \ = \ \exp\{i\gamma^* s - d^*|s|^\alpha(1 + \frac{i\beta^* s}{|s|}\tan\frac{\pi\alpha}{2})\} \quad (s \in \mathbb{R}),$$

а параметры γ^*, d^* и β^* имеют вид

$$\gamma^* = (c-a)\tilde{\gamma} - \gamma, \quad d^* = |c-a|^{\alpha}\tilde{d} + d, \quad \beta^* = \frac{\tilde{d}|c-a|^{\alpha-1}\tilde{\beta}(c-a) - d\beta}{d + \tilde{d}|c-a|^{\alpha}}.$$

Более того, Теорема 4.2.1 позволяет нам описать взаимосвязь характеристик "тяжести" хвостов распределений случайных величин X_1 и Λ_1 в описанной выше модели (см. соотношение (2.1.1)) с выбором констант, нормирующих соответствующий обобщенный процесс риска. А именно, предположим, что при $n \to \infty$ случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ удовлетворяют условию

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - na}{b(n)n^{1/\alpha_X}} \implies Y_{\alpha_X} \qquad (n \to \infty),$$

а случайные величины $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ – условию

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \Lambda_j - n}{b(n)n^{1/\alpha_\Lambda}} \implies \widetilde{Y}_{\alpha_\Lambda} \qquad (n \to \infty)$$

с некоторыми $\alpha_X \in (1,2]$ и $\alpha_\Lambda \in (1,2]$. Мы по-прежнему интересуемся асимптотическим поведением случайных величин $Z(t)$, определяемых соотношением (4.1.3) с некоторым $\alpha \in (1,2]$. Теорема 4.2.1 позволяет полностью описать предельное поведение случайных величин $Z(t)$ в зависимости от соотношения между α, α_X и α_Λ.

А именно, если $1 < \alpha_X < \alpha_\Lambda \le 2$, то

$$Z(t) \implies Z \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } 1 < \alpha < \alpha_X, \\ -Y_{\alpha_X}, & \text{если } \alpha = \alpha_X, \end{cases}$$

$Z(t)$ не имеет собственного предельного распределения при $\alpha_X < \alpha \le 2$.

Если $1 < \alpha_X = \alpha_\Lambda \le 2$, то

$$Z(t) \implies Z \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } 1 < \alpha < \alpha_X, \\ (c-a)\widetilde{Y}_{\alpha_\Lambda} - Y_{\alpha_X}, & \text{если } \alpha = \alpha_X, \end{cases}$$

где $\widetilde{Y}_{\alpha_\Lambda}$ и Y_{α_X} независимы, причем остальные параметры устойчивых случайных величин $\widetilde{Y}_{\alpha_\Lambda}$ и Y_{α_X} (γ, d и β) могут и не совпадать, и $Z(t)$ не имеет собственного предельного распределения при $\alpha_X < \alpha \le 2$.

Наконец, если $1 < \alpha_\Lambda < \alpha_X \le 2$, то

$$Z(t) \implies Z \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } 1 < \alpha < \alpha_\Lambda, \\ (c-a)Y_{\alpha_\Lambda}, & \text{если } \alpha = \alpha_\Lambda, \end{cases}$$

$Z(t)$ не имеет собственного предельного распределения при $\alpha_\Lambda < \alpha \le 2$.

Другими словами, чтобы получить невырожденное предельное распределение, нормировка должна соответствовать более "тяжелому" хвосту, который и определяет вид предельного закона для обобщенного процесса риска с пакетным поступлением страховых требований.

4.4 Оценки точности аппроксимации распределений обобщенных процессов риска с большими выплатами сдвиговыми смесями устойчивых законов.

В данном разделе мы рассмотрим оценки точности аппроксимации распределений обобщенных процессов риска

$$R(t) = c\Lambda(t) - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$$

с большими выплатами сдвиговыми смесями устойчивых законов. Другими словами, мы приведем оценки скорости сходимости в Теореме 4.2.1 при $b(t) \equiv b > 0$.

Всюду далее мы предполагаем, что $\alpha \in (1, 2]$ и $\mathsf{E}\Lambda(t) = t$ (случай $\alpha = 2$ подробно рассмотрен в (Бенинг и Королев, 2000b)).

Как и ранее, мы обозначим

$$F_t(x) = \mathsf{P}\left(\frac{(c-a)(\Lambda(t) - t)}{bt^{1/\alpha}} < x\right)$$

и для $\epsilon \in (0, 1)$

$$\mathcal{N}_\epsilon = \mathcal{N}_\epsilon(t) = \{\lambda : |\lambda^{1/\alpha} - t^{1/\alpha}| \le \epsilon t^{1/\alpha}\} = \{\lambda : t(1-\epsilon)^{1/\alpha} \le \lambda \le t(1+\epsilon)^{1/\alpha}\}.$$

Так как
$$\mathsf{P}\Big(\frac{c\Lambda(t)-\sum_{j=1}^{N(t)}X_j-(c-a)t}{bt^{1/\alpha}}<x\Big)=$$
$$=\int\limits_0^\infty \mathsf{P}\Big(\frac{a\lambda-\sum_{j=1}^{N_\lambda}X_j}{b\lambda^{1/\alpha}}<x(\frac{t}{\lambda})^{1/\alpha}-\frac{(c-a)(\lambda-t)}{b\lambda^{1/\alpha}}\Big)d\mathsf{P}(\Lambda(t)<\lambda),$$
то при каждом $x\in\mathbb{R}$
$$\Big|\mathsf{P}\Big(\frac{c\Lambda(t)-\sum_{j=1}^{N(t)}X_j-(c-a)t}{bt^{1/\alpha}}<x\Big)-(1-G_\alpha(-x))*F_t(x)\Big|\le$$
$$\le\Big|\int\limits_{\lambda\in\mathcal{N}_\epsilon}\Big[\mathsf{P}\Big(\frac{a\lambda-\sum_{j=1}^{N_\lambda}X_j}{b\lambda^{1/\alpha}}<x(\frac{t}{\lambda})^{1/\alpha}-\frac{(c-a)(\lambda-t)}{b\lambda^{1/\alpha}}\Big)-$$
$$-\Big(1-G_\alpha\big(-x-\frac{(c-a)(\lambda-t)}{bt^{1/\alpha}}\big)\Big)\Big]d\mathsf{P}(\Lambda(t)<\lambda)\Big|+$$
$$+\Big|\int\limits_{\lambda\notin\mathcal{N}_\epsilon}\Big[\mathsf{P}\Big(\frac{a\lambda-\sum_{j=1}^{N_\lambda}X_j}{b\lambda^{1/\alpha}}<x(\frac{t}{\lambda})^{1/\alpha}-\frac{(c-a)(\lambda-t)}{b\lambda^{1/\alpha}}\Big)-$$
$$-\Big(1-G_\alpha\big(-x-\frac{(c-a)(\lambda-t)}{bt^{1/\alpha}}\big)\Big)\Big]d\mathsf{P}(\Lambda(t)<\lambda)\Big|\ \equiv$$
$$\equiv\ I_1+I_2.$$
При этом в силу того, что $|1-x^{1/\alpha}|\le|1-x|$ при любом $x>0$ и $\alpha\in(1,2]$ в силу обобщенного неравенства Маркова мы имеем
$$I_2\le\mathsf{P}(\Lambda(t)\notin\mathcal{N}_\epsilon(t))=\mathsf{P}\left(\left|\left(\frac{\Lambda(t)}{t}\right)^{1/\alpha}-1\right|>\epsilon\right)\le$$
$$\le\mathsf{P}\left(\left|\frac{\Lambda(t)}{t}-1\right|>\epsilon\right)\le\frac{1}{\epsilon}\mathsf{E}\min\left\{\epsilon,\left|\frac{\Lambda(t)}{t}-1\right|\right\}. \tag{4.4.1}$$
В то же время
$$I_1\le\Big|\int\limits_{\lambda\in\mathcal{N}_\epsilon}\Big[\mathsf{P}\Big(\frac{a\lambda-\sum_{j=1}^{N_\lambda}X_j}{b\lambda^{1/\alpha}}<x(\frac{t}{\lambda})^{1/\alpha}-\frac{(c-a)(\lambda-t)}{b\lambda^{1/\alpha}}\Big)-$$
$$-\Big(1-G_\alpha\big(-x(\frac{t}{\lambda})^{1/\alpha}-\frac{(c-a)(\lambda-t)}{b\lambda^{1/\alpha}}\big)\Big)\Big]d\mathsf{P}(\Lambda(t)<\lambda)\Big|+$$

$$+\Big|\int\limits_{\lambda\in\mathcal{N}_\epsilon}\Big[G_\alpha(-x(\frac{t}{\lambda})^{1/\alpha}-\frac{(c-a)(\lambda-t)}{b\lambda^{1/\alpha}})-$$

$$-G_\alpha(-x-\frac{(c-a)(\lambda-t)}{bt^{1/\alpha}})\Big]d\mathsf{P}(\Lambda(t)<\lambda)\Big| \equiv$$

$$\equiv I_{11}+I_{12}.$$

В силу Теоремы 2.4.2 при $\alpha<r\leq 1+\alpha$ для любого $\delta\in(0,1)$ мы имеем

$$I_{11}\ \leq \sup_{\lambda\in\mathcal{N}_\epsilon(t)}\Bigg[\frac{C_0(\alpha,r)\max\{\nu_r,\,\nu_r^{1/(r+1)}\}}{(1-\delta)^\alpha\lambda^{(r-\alpha)/\alpha}}+$$

$$+\frac{C_2(\alpha)a^2}{b^2\lambda^{(2-\alpha)/\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\max\left\{\frac{1}{\delta},\,\frac{C_1(\alpha)}{1-\delta}\right\}\Bigg]=$$

$$=\frac{C_0(\alpha,r)\max\{\nu_r,\,\nu_r^{1/(r+1)}\}}{(1-\delta)^\alpha(1-\epsilon)^{r-\alpha}t^{(r-\alpha)/\alpha}}+$$

$$+\frac{C_2(\alpha)a^2}{b^2(1-\epsilon)^{2-\alpha}t^{(2-\alpha)/\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{(1-\epsilon)^\alpha t}}\max\left\{\frac{1}{\delta},\,\frac{C_1(\alpha)}{1-\delta}\right\}. \qquad (4.4.2)$$

Наконец, рассмотрим I_{12}. Пусть $p_\alpha(x)=G'_\alpha(x)$ – плотность устойчивого закона $G_\alpha(x)$. Для каждого $\lambda\in\mathcal{N}_\epsilon$, каждого $t\geq 0$ и любого $x\in\mathbb{R}$ при некотором $\delta_\lambda\in[0,1]$ по формуле Лагранжа мы имеем

$$|G_\alpha(x(\frac{t}{\lambda})^{1/\alpha}-\frac{(c-a)(\lambda-t)}{b\lambda^{1/\alpha}})-G_\alpha(x-\frac{(c-a)(\lambda-t)}{bt^{1/\alpha}})|=$$

$$=|G_\alpha(x(\frac{t}{\lambda})^{1/\alpha}-\frac{(c-a)(\lambda-t)}{b\lambda^{1/\alpha}})-G_\alpha((x(\frac{t}{\lambda})^{1/\alpha}-\frac{(c-a)(\lambda-t)}{b\lambda^{1/\alpha}})\cdot(\frac{\lambda}{t})^{1/\alpha})|=$$

$$=|(x(\frac{t}{\lambda})^{1/\alpha}-\frac{(c-a)(\lambda-t)}{b\lambda^{1/\alpha}})(1-(\frac{\lambda}{t})^{1/\alpha})\cdot p_\alpha((x(\frac{t}{\lambda})^{1/\alpha}-\frac{(c-a)(\lambda-t)}{b\lambda^{1/\alpha}})\cdot\delta_\lambda+$$

$$+(x(\frac{t}{\lambda})^{1/\alpha}-\frac{(c-a)(\lambda-t)}{b\lambda^{1/\alpha}})\cdot(\frac{\lambda}{t})^{1/\alpha}\cdot(1-\delta_\lambda))|=$$

$$=|(x(\frac{t}{\lambda})^{1/\alpha}-\frac{(c-a)(\lambda-t)}{b\lambda^{1/\alpha}})(1-(\frac{\lambda}{t})^{1/\alpha})\times$$

$$\times p_\alpha((x(\frac{t}{\lambda})^{1/\alpha}-\frac{(c-a)(\lambda-t)}{b\lambda^{1/\alpha}})[(1-(\frac{\lambda}{t})^{1/\alpha})\delta_\lambda+(\frac{\lambda}{t})^{1/\alpha}])|\leq$$

$$\leq |1-(\frac{\lambda}{t})^{1/\alpha}|[(1-(\frac{\lambda}{t})^{1/\alpha})\delta_\lambda+(\frac{\lambda}{t})^{1/\alpha}]^{-1}\cdot\sup_x|x|p_\alpha(x)\leq$$

$$\leq \frac{C(\alpha)|1-(\frac{\lambda}{t})^{1/\alpha}|}{\min\limits_{n\in\mathcal{N}_\epsilon}\min\limits_{\delta\in[0,1]}[(1-(\frac{\lambda}{t})^{1/\alpha})\delta+(\frac{\lambda}{t})^{1/\alpha}]}=\frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}|1-(\frac{\lambda}{t})^{1/\alpha}|\leq\frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}|1-\frac{\lambda}{t}|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_{12} \ &\leq\ \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\cdot\mathsf{E}\left|\frac{\Lambda(t)}{t}-1\right|\mathbf{1}(\Lambda(t)\in\mathcal{N}_\epsilon(t))\ \leq \\ &\leq\ \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\cdot\mathsf{E}\min\left\{\epsilon,\left|\frac{\Lambda(t)}{t}-1\right|\right\}. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Объединяя оценки (4.4.1), (4.4.2) и (4.4.3), мы приходим к следующему результату.

Теорема 4.4.1. *Пусть $\alpha\in(1,2)$ и соотношение (2.4.1) выполнено при $\alpha<r\leq 1+\alpha$. Тогда для любых $t>0$, $\epsilon\in(0,1)$ и $\delta\in(0,1)$ справедлива оценка*

$$\sup_x\left|\mathsf{P}\left(\frac{R(t)-(c-a)t}{bt^{1/\alpha}}<x\right)-(1-G_\alpha(-x))*F_t(x)\right|\leq$$

$$\leq\left(\frac{1}{\epsilon}+\frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\right)\cdot\mathsf{E}\min\left\{\epsilon,\left|\frac{\Lambda(t)}{t}-1\right|\right\}+\frac{C_0(\alpha,r)\max\{\nu_r,\,\nu_r^{1/(r+1)}\}}{(1-\delta)^\alpha(1-\epsilon)^{r-\alpha}t^{(r-\alpha)/\alpha}}+$$

$$+\frac{C_2(\alpha)a^2}{b^2(1-\epsilon)^{2-\alpha}t^{(2-\alpha)/\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{(1-\epsilon)^\alpha t}}\max\left\{\frac{1}{\delta},\,\frac{C(\alpha)}{1-\delta}\right\},$$

где $C(\alpha)$, $C_2(\alpha)$, $C_0(\alpha,r)$ определены в Главе 2.

Обозначим $\widehat{F}(x)=\mathsf{P}(V<x)$. Пусть ρ – равномерная, а ρ_H – сглаженная равномерная метрики. Легко видеть, что для любых функций распределения F_1, F_2, F_3

$$\rho_H(F_1,F_2)\leq\rho(F_1,F_2)$$

и

$$\rho_H(F_1*F_3,\,F_2*F_3)\leq\rho_H(F_1,F_2).$$

Поэтому

$$\rho_H(\mathsf{P}(\frac{R(t)-(c-a)t}{bt^{1/\alpha}} < x),\, (1-G_\alpha(-x)) * \widehat{F}(x)) \le$$

$$\le \rho_H(\mathsf{P}(\frac{R(t)-(c-a)t}{bt^{1/\alpha}} < x),\, (1-G_\alpha(-x)) * F_t(x)) +$$

$$+\rho_H((1-G_\alpha(-x)) * F_t(x),\, (1-G_\alpha(-x)) * \widehat{F}(x)) \le$$

$$\le \rho(\mathsf{P}(\frac{R(t)-(c-a)t}{bt^{1/\alpha}} < x),\, (1-G_\alpha(-x)) * F_t(x)) + \rho_H(F_t,\, \widehat{F}).$$

Таким образом, из Теоремы 4.4.1 мы получаем следующую оценку скорости сходимости в Теореме 4.2.1.

Теорема 4.4.2. *Пусть $\alpha \in (1,2)$ и соотношение (2.4.1) выполнено при $\alpha < r \le 1+\alpha$. Тогда для любых $t > 0$, $\epsilon \in (0,1)$ и $\delta \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$\rho_H\left(\mathsf{P}\left(\frac{R(t)-(c-a)t}{bt^{1/\alpha}} < x\right),\, (1-G_\alpha(-x)) * \widehat{F}(x)\right) \le$$

$$\le \rho_H(F_t,\, \widehat{F}) + \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{C(\alpha)}{1-\epsilon}\right) \cdot \mathsf{E}\min\left\{\epsilon,\, \left|\frac{\Lambda(t)}{t} - 1\right|\right\} +$$

$$+\frac{C_0(\alpha,r)\max\left\{\nu_r,\, \nu_r^{1/(r+1)}\right\}}{(1-\delta)^\alpha(1-\epsilon)^{r-\alpha}t^{(r-\alpha)/\alpha}} +$$

$$+\frac{C_2(\alpha)a^2}{b^2(1-\epsilon)^{2-\alpha}t^{(2-\alpha)/\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{(1-\epsilon)^\alpha t}}\max\left\{\frac{1}{\delta},\, \frac{C(\alpha)}{1-\delta}\right\},$$

где $C(\alpha)$, $C_2(\alpha)$ и $C_0(\alpha,r)$ определены в Главе 2.

Замечание 4.4.1. Из доказательства Теоремы 4.4.1 вытекает, что при $b(t) \equiv b > 0$ каждое из условий (4.2.1) и (4.2.3) влечет

$$\frac{\Lambda(t)}{t} \Longrightarrow 1 \quad (t \to \infty). \tag{4.4.4}$$

Это обстоятельство оправдывает присутствие слагаемого вида $\mathsf{E}\min\{\epsilon,\, |\Lambda(t)/t - 1|\}$ в оценке, устанавливаемой Теоремой 4.4.2, так как легко убедиться, что условие (4.4.4) эквивалентно тому, что

$$\mathsf{E}\min\left\{\epsilon,\, \left|\frac{\Lambda(t)}{t} - 1\right|\right\} \Longrightarrow 0 \quad (t \to \infty).$$

Более того, так как

$$\mathsf{E}\min\left\{\epsilon,\left|\frac{\Lambda(t)}{t}-1\right|\right\}\leq t^{1/\alpha-1}\mathsf{E}\left|\frac{\Lambda(t)-t}{t^{1/\alpha}}\right|,$$

то при дополнительном условии равномерной интегрируемости случайных величин $(\Lambda(t)-t)/t^{1/\alpha}$ можно утверждать, что

$$\mathsf{E}\min\left\{\epsilon,\left|\frac{\Lambda(t)}{t}-1\right|\right\} \;=\; O(t^{1/\alpha-1}) \qquad (t\to\infty).$$

Замечание 4.4.2. В формулировке Теоремы 4.4.2 сглаженное равномерное расстояние между распределениями F_t и $\widehat{F}$ можно заменить на метрику Леви:

$$\rho_H(F_t,\,\widehat{F})\leq(1+C_H)L(F_t,\,\widehat{F}).$$

Если $\alpha=2$ и $r=3$, то в качестве b мы возьмем $b=\sqrt{a^2+\sigma^2}$, где $\sigma^2=\mathsf{D}X_1$ (очевидно, $b^2=\mathsf{E}X_1^2$). Обозначим $\mu_3=\mathsf{E}|X_1|^3$. При этом вместо Теоремы 2.4.2 для оценивания I_{11} мы можем воспользоваться неравенством Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм (Теорема 1.1.4):

$$\sup_x\left|\mathsf{P}\Big(\frac{a\lambda-\sum_{j=1}^{N_\lambda}X_j}{b\sqrt{\lambda}}<x\Big)-\Phi(x)\right|\leq\frac{C_0}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\mu_3}{b^{3/2}},$$

где C_0 – абсолютная постоянная в неравенстве Берри-Эссеена, $C_0\leq 0.7655$. Далее, получим

$$I_{11}\leq\sup_{\lambda\in\mathcal{N}_\epsilon(t)}\frac{C_0}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\mu_3}{b^{3/2}}=\frac{C_0}{(1-\epsilon)\sqrt{t}}\cdot\frac{\mu_3}{b^{3/2}}. \qquad (4.4.2')$$

Объединяя оценки (4.4.1), (4.4.2′) и (4.4.3), мы приходим к следующему результату.

Теорема 4.4.3. *Для любых $t>0$ и $\epsilon\in(0,1)$ справедлива оценка*

$$\rho_H\left(\mathsf{P}\left(\frac{R(t)-(c-a)t}{b\sqrt{t}}<x\right),\,(\Phi*\widehat{F})(x)\right)\leq\rho_H(F_t,\,\widehat{F})+$$

$$+\frac{C_0}{(1-\epsilon)\sqrt{t}}\cdot\frac{\mu_3}{b^{3/2}}+\left(\frac{1}{\epsilon}+\frac{1}{(1-\epsilon)\sqrt{2\pi e}}\right)\cdot\mathsf{E}\min\left\{\epsilon,\,\left|\frac{\Lambda(t)}{t}-1\right|\right\}.$$

Этот результат представляет собой, возможно, более удобную оценку, нежели та, которая для случая $\alpha = 2$ и $r = 3$ приведена в (Бенинг и Королев, 2000b). При этом, естественно, в Теореме 4.4.3 $\rho_H(F_t,\,\widehat{F})$ можно заменить на $(1+C_H)L(F_t,\,\widehat{F})$ (см. Замечание 4.4.2).

Учитывая Замечание 4.4.1, мы приходим к следующему результату.

Следствие 4.4.1. *Пусть соотношение (2.4.1) выполнено при* $r = 3$. *Тогда для любых* $t > 0$ *и* $\epsilon \in (0,1)$ *справедлива оценка*

$$\rho_H\left(\mathsf{P}\left(\frac{R(t)-(c-a)t}{b\sqrt{t}} < x\right),\,(\Phi * \widehat{F})(x)\right) \le \rho_H(F_t,\,\widehat{F}) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{t}}\left[\frac{C_0}{(1-\epsilon)}\cdot\frac{\mu_3}{b^{3/2}} + \left(\frac{1}{\epsilon}+\frac{1}{(1-\epsilon)\sqrt{2\pi e}}\right)\cdot\mathsf{E}\left|\frac{\Lambda(t)-t}{\sqrt{t}}\right|\right].$$

5

Об оптимальном планировании резерва и начальном капитале страховой компании

5.1 Об оптимальном планировании резерва.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в момент $t = 0$ на складе имеется u единиц некоторого продукта. В течение интервала времени $[0, T]$ поступают заявки о поставке этого продукта на склад или отгрузки со склада. Пусть X_i – количество единиц продукта, которое должно быть поставлено (изъято со склада) в соответствии с i-й заявкой. Если $N(t)$ – количество заявок, поступивших в течение интервала времени $[0, t]$ $(0 \leq t \leq T)$, то суммарное количество продукта, которое должно быть поставлено за время $[0, t]$, очевидно, имеет вид

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

При этом владельцы склада несут издержки двух видов. Во-первых, это издержки, связанные с хранением продукта. Пусть $c_1(t)$ – издержки на хранение единицы продукта в момент t. Во-вторых, это издержки, связанные с невозможностью выполнения заявки из-за нехватки продукта на складе. Пусть $c_2(t)$ – издержки, связанные с нехваткой единицы продукта в момент t. Тогда средние издержки за период $[0, T]$, как легко видеть, равны

$$D(u) = \int\limits_0^T c_1(t)\mathsf{E}(u - S(t))^+ dt + \int\limits_0^T c_2(t)\mathsf{E}(S(t) - u)^+ dt. \qquad (5.1.1)$$

В данной работе мы рассмотрим задачу о минимизации средних издержек в зависимости от величины u, то есть найдем такое u_0, что

$$D(u_0) = \min_{u \geq 0} D(u).$$

Подобная задача рассматривалась в работах (Кофман, 1966), (Ротарь, 1972a), (Ротарь, 1976), (Петраков и Ротарь, 1985), (Ротарь, 1972b). Наша цель – уточнить результаты, полученные в упомянутых работах. Более того, мы продемонстрируем, что рассматриваемую задачу можно переформулировать в терминах, обычных для актуарной математики, и решить задачу об определении значения начального капитала страховой компании, оптимального в смысле критерия (5.1.1). Это приведет нас к довольно неожиданному выводу.

Предположим, что случайные величины X_j абсолютно непрерывны. Поэтому для каждого $t \in [0, T]$ существует плотность случайной величины $S(t)$, которую мы обозначим $f_t(x)$, $x \in \mathbb{R}$ и мы можем представить $D(u)$ в виде

$$D(u) = u \int\limits_0^T c_1(t)\mathsf{P}(S(t) < u)dt - \int\limits_0^T c_1(t)\mathsf{E}S(t)\mathbf{1}(u > S(t))dt +$$

$$+ \int\limits_0^T c_2(t)\mathsf{E}S(t)\mathbf{1}(S(t) > u)dt - u\int\limits_0^T c_2(t)\mathsf{P}(S(t) > u)dt =$$

$$= u\int\limits_0^T c_1(t)\left[\int\limits_{-\infty}^u f_t(x)dx\right]dt - \int\limits_0^T c_1(t)\left[\int\limits_{-\infty}^u x f_t(x)dx\right]dt + \int\limits_0^T c_2(t)\mathsf{E}S(t)dt -$$

$$- \int\limits_0^T c_2(t)\left[\int\limits_{-\infty}^u x f_t(x)dx\right]dt - u\int\limits_0^T c_2(t)dt + u\int\limits_0^T c_2(t)\left[\int\limits_{-\infty}^u f_t(x)dx\right]dt.$$

Дифференцируя $D(u)$ по u, получаем

$$\frac{dD(u)}{du} = \int\limits_0^T c_1(t)\left[\int\limits_{-\infty}^u f_t(x)dx\right]dt + u\int\limits_0^T c_1(t)f_t(u)dt - u\int\limits_0^T c_1(t)f_t(u)dt -$$

$$-u\int_0^T c_2(t)f_t(u)dt-\int_0^T c_2(t)dt+\int_0^T c_2(t)\left[\int_{-\infty}^u f_t(x)dx\right]dt+u\int_0^T c_2(t)f_t(u)dt=$$

$$=\int_0^T c_1(t)\mathsf{P}(S(t)<u)dt-\int_0^T c_2(t)dt+\int_0^T c_2(t)\mathsf{P}(S(t)<u)dt,$$

откуда вытекает, что u_0 является решением уравнения

$$\int_0^T [c_1(t)+c_2(t)]\mathsf{P}(S(t)<u)dt=\int_0^T c_2(t)dt. \tag{5.1.2}$$

Если $c_1(t)\equiv\mathrm{const}=c_1$, $c_2(t)\equiv\mathrm{const}=c_2$, то это уравнение приобретает вид

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathsf{P}(S(t)<u)dt=\delta, \tag{5.1.3}$$

где $\delta=c_2/(c_1+c_2)$.

5.2 Оценки для оптимального резерва.

Точное решение уравнения (5.1.3) чрезвычайно трудоемко, а без дополнительной исчерпывающей информации о распределении случайных величин $X_i,\ i\geq 1$, практически невозможно. Поэтому мы, ограничившись информацией о первых трех моментах случайных величин $X_i,\ i\geq 1$, будем искать верхние и нижние оценки для u_0 такого, что $D(u_0)=\min\limits_{u\geq 0}D(u)$.

Обозначим $\mathsf{E}X_i=m$, $\mathsf{D}X_i=\sigma^2$, $\mathsf{E}X_i^2=\mu_2$ $(=m^2+\sigma^2)$, $\mathsf{E}X_i^3=\mu_3$. По смыслу содержательной задачи, сформулированной во введении, предположим, что $m>0$.

Как и в работах (Ротарь, 1972a), (Ротарь, 1976), (Петраков и Ротарь, 1985), (Ротарь, 1972b), мы будем предполагать, что $N(t)$ – ординарный однородный пуассоновский процесс с параметром λ. Такое предположение соответствует представлению о том, что точки скачков (в данном случае единичных по величине), то есть моменты времени, в которые приходят заявки (мы считаем, что заявки выполняются мгновенно), совершенно хаотично распределены на временной оси (см., например,(Бенинг и Королев, 1997)). Легко видеть, что в этом случае $\mathsf{E}S(t)=m\lambda t$, $\mathsf{D}S(t)=\mu_2\lambda t$.

Основная идея отыскания верхних и нижних оценок для u_0 заключается в замене, вообще говоря, неизвестной подынтегральной функции в уравнении (5.1.3) известной конструкцией с сохранением монотонности зависимости левой части (5.1.3) от u и решении новых уравнений вместо (5.1.3). Используя равномерную оценку скорости сходимости, предложенную в Теореме 1.1.4, мы можем оценить

$$\Phi\left(\frac{u-m\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right)-\frac{L_3}{\sqrt{\lambda t}}\leq \mathsf{P}(S(t)<u)\leq \Phi\left(\frac{u-m\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right)+\frac{L_3}{\sqrt{\lambda t}},$$

откуда мы получаем, что

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T\Phi\left(\frac{u-m\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right)dt-\frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}\ \leq$$
$$\leq\ \frac{1}{T}\int\limits_0^T\mathsf{P}(S(t)<u)dt\ \leq$$
$$\leq\ \frac{1}{T}\int\limits_0^T\Phi\left(\frac{u-m\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right)dt+\frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}. \qquad (5.2.2)$$

Поскольку под интегралами здесь стоят функции распределения, монотонно не убывающие по u, все части цепочки неравенств (5.2.2) монотонно не убывают по u. Поэтому с учетом (5.1.3) мы заключаем, что

$$u_1\leq u_0\leq u_2,$$

где u_1 – решение уравнения

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T\Phi\left(\frac{u-m\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right)dt=\delta-\frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}, \qquad (5.2.3)$$

а u_2 – решение уравнения

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T\Phi\left(\frac{u-m\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right)dt=\delta+\frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}. \qquad (5.2.4)$$

Нашей ближайшей целью будет отыскание нижней оценки для u_1 и верхней оценки для u_2.

Введем обозначения

$$\frac{u}{m\lambda}=x,\quad m\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}}=A.$$

Так как $m > 0$, то и $A > 0$. Оценим сверху и снизу

$$I_T(x) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \Phi\left(\frac{u - m\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right) dt = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \Phi\left(A\frac{x-t}{\sqrt{t}}\right) dt.$$

Верна одна простая

Лемма 5.2.1. *Для дифференцируемой на $[a,b]$ функции $f(x)$, для которой*

$$f(a) \leq \alpha, \qquad f(b) \geq \beta, \qquad f'(x) \leq g(x),$$

где функция $g(x)$ определена на этом же отрезке, верна оценка

$$\beta - \int\limits_x^b g(x)dx \leq f(x) \leq \alpha + \int\limits_a^x g(x)dx.$$

Понятно, что

$$I_T(0) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \Phi(-A\sqrt{t})dt \leq \frac{1}{T}\int\limits_0^\infty \Phi(-A\sqrt{t})dt \; =$$

$$= \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \exp\left\{\frac{-A^2t}{2}\right\} dt = \frac{1}{2A^2T},$$

$$I_T'(x) = \frac{A}{T}\int\limits_0^T \frac{1}{\sqrt{t}}\phi\left(A\frac{x-t}{\sqrt{t}}\right) dt \leq \frac{A}{T}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}\phi\left(A\frac{x-t}{\sqrt{t}}\right) dt =$$

$$= \frac{A}{T}\frac{\exp\{A^2x\}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{A^2x}{2}\frac{1}{t} - \frac{A^2}{2}t\right) dt.$$

Используя хорошо известные свойства цилиндрических функций мнимого аргумента $K_\nu(z)$ (см., например, (Градштейн и Рыжик, 1962), соотношения 3.487(2) (с. 356) и 8.432(3) (с. 972)), мы получаем

$$I_T'(x) \leq \frac{A}{T}\frac{\exp\{A^2x\}}{\sqrt{2\pi}} 2\sqrt{x}K_{1/2}(A^2x) =$$

$$= \frac{A}{T}\frac{\exp\{A^2x\}}{\sqrt{2\pi}} 2\sqrt{x}\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\sqrt{A^2x}\int\limits_1^\infty e^{-A^2xz}dz = \frac{1}{T}.$$

Далее,

$$1 - I_T(T) = \int\limits_0^1 \Phi\left(-A\sqrt{T}\frac{z}{\sqrt{1-z}}\right) dz < \int\limits_0^1 \Phi\left(-A\sqrt{T}z\right) dz =$$

$$= \Phi(-A\sqrt{T}) + \frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{1/2} \exp\left\{-A^2Tz\right\} dz =$$

$$= \Phi(-A\sqrt{T}) + \frac{1}{A\sqrt{2\pi T}} \left[1 - \exp\left\{-\frac{A^2T}{2}\right\}\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{A\sqrt{T}}\phi(A\sqrt{T}) + \frac{1}{A\sqrt{2\pi T}} - \frac{1}{A\sqrt{2\pi T}} \exp\left\{-\frac{A^2T}{2}\right\} = \frac{1}{A\sqrt{2\pi T}}.$$

Таким образом, мы приходим к очень простой оценке на интервале $[0;T]$

$$\frac{x}{T} - \frac{1}{A\sqrt{2\pi T}} \leq \frac{1}{T}\int\limits_0^T \Phi\left(A\frac{x-t}{\sqrt{t}}\right) dt \leq \frac{x}{T} + \frac{1}{2A^2T}.$$

Итак, из этой оценки и из (5.2.3), (5.2.4) вытекает, что $u_1 \geq m\lambda x_1$, где x_1 – решение уравнения

$$\frac{x}{T} = \delta - \frac{1}{2A^2T} - \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}},$$

$u_2 \leq m\lambda x_2$, где x_2 –решение уравнения

$$\frac{x}{T} = \delta + \frac{1}{A\sqrt{2\pi T}} + \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}.$$

Эти уравнения решаются элементарно:

$$x_1 = T\left(\delta - \frac{1}{2A^2T} - \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}\right),$$

$$x_2 = T\left(\delta + \frac{1}{A\sqrt{2\pi T}} + \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}\right),$$

откуда

$$m\lambda T\left(\delta - \frac{\mu_2}{2m^2\lambda T} - \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}\right) \leq u_0 \leq m\lambda T\left(\delta + \frac{1}{m}\sqrt{\frac{\mu_2}{2\pi\lambda T}} + \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}\right).$$

Из этих соотношений мы получаем следующее утверждение.

Теорема 5.2.1. *Пусть $m > 0$,*

$$\psi_2(\lambda T) \leq \delta \leq 1 - \psi_1(\lambda T).$$

Тогда

$$m\lambda T(\delta - \psi_2(\lambda T)) \le u_0 \le m\lambda T(\delta + \psi_1(\lambda T)),$$

где

$$\psi_1(z) = \frac{2L_3}{\sqrt{z}} + \frac{1}{m\sqrt{z}}\sqrt{\frac{\mu_2}{2\pi}}, \tag{5.2.5}$$

$$\psi_2(z) = \frac{2L_3}{\sqrt{z}} + \frac{\mu_2}{2m^2 z}. \tag{5.2.6}$$

Пренебрегая членами более высокого порядка малости, нежели $O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda T}}\right)$, мы заметим, что из Теоремы 5.2.1 вытекает, что

$$\psi_1(\lambda T)) + \psi_2(\lambda T)) \approx \frac{1}{\delta\sqrt{\lambda T}}\left(4L_3 + \frac{1}{m}\sqrt{\frac{\mu_2}{2\pi}}\right).$$

Это почти в 6 раз меньше, чем в аналогичной оценке из работы (Ротарь, 1976).

5.3 Оценки для оптимального резерва с непостоянной функцией издержек.

Для более полной картины рассмотрим пример оценки оптимального резерва с непостоянными функциями издержек. А именно, положим $c_1(t) = c_1 t^n$, $c_2(t) = c_2 t^n$, при некотором целом неотрицательном n. Тогда уравнение (5.1.2) примет вид

$$\frac{n+1}{T^{n+1}}\int\limits_0^T t^n \mathsf{P}(S(t) < u)dt = \delta, \tag{5.3.1}$$

где $\delta = c_2/(c_1 + c_2)$.

Используя тот же прием замены случайной суммы равномерной оценкой Берри-Эссеена, как и в предыдущем разделе, мы приходим к выражению

$$\frac{n+1}{T^{n+1}}\int\limits_0^T t^n \Phi\left(\frac{u - m\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right)dt - \frac{n+1}{n+1/2}\frac{L_3}{\sqrt{\lambda T}} \le \frac{n+1}{T^{n+1}}\int\limits_0^T t^n \mathsf{P}(S(t) < u)dt \le$$

$$\le \frac{n+1}{T^{n+1}}\int\limits_0^T t^n \Phi\left(\frac{u - m\lambda t}{\sqrt{\mu_2\lambda t}}\right)dt + \frac{n+1}{n+1/2}\frac{L_3}{\sqrt{\lambda T}}. \tag{5.3.2}$$

Поскольку под интегралом, как и раньше, здесь стоят функции распределения, монотонно не убывающие по u все цепочки неравенств (5.3.2) монотонно не убывают по u. Поэтому с учетом (5.3.1) мы заключаем, что

$$u_1 \leq u_0 \leq u_2,$$

где u_1 – решение уравнения

$$\frac{n+1}{T^{n+1}} \int\limits_0^T t^n \Phi\left(\frac{u - m\lambda t}{\sqrt{\mu_2 \lambda t}}\right) dt = \delta - \frac{n+1}{n+1/2} \frac{L_3}{\sqrt{\lambda T}}, \tag{5.3.3}$$

а u_2 – решение уравнения

$$\frac{n+1}{T^{n+1}} \int\limits_0^T t^n \Phi\left(\frac{u - m\lambda t}{\sqrt{\mu_2 \lambda t}}\right) dt = \delta + \frac{n+1}{n+1/2} \frac{L_3}{\sqrt{\lambda T}}, \tag{5.3.4}$$

Нашей ближайшей целью будет отыскание нижней оценки для u_1 и верхней оценки для u_2.

Введем обозначения

$$\frac{u}{m\lambda} = x, \qquad m\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} = A.$$

Так как $m > 0$, то и $A > 0$. Оценим сверху и снизу

$$I_{nT}(x) \ \equiv \ \int\limits_0^T t^n \Phi\left(\frac{u - m\lambda t}{\sqrt{\mu_2 \lambda t}}\right) dt = \int\limits_0^T t^n \Phi\left(A\frac{x - t}{\sqrt{t}}\right) dt.$$

Опять воспользуемся Леммой 5.2.1. Поскольку

$$I_{nT}(x) \leq \int\limits_0^\infty t^n \Phi\left(A\frac{x - t}{\sqrt{t}}\right) dt \equiv I_n(x),$$

то для оценок $I_{nT}(x)$ вычислим сначала $I_n(0)$, интегрируя по частям.

$$I_n(0) = \int\limits_0^\infty t^n \Phi(-A\sqrt{t}) dt = \frac{A}{2\sqrt{2\pi}(n+1)} \int\limits_0^\infty t^{n+1/2} \exp\left(-\frac{A^2}{2} t\right) dt =$$

$$= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}(n+1)} \frac{1}{A^{2n+2}} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \frac{(2n+1)!}{(n+1)! 2^{n+1}} \frac{1}{A^{2n+2}}.$$

Далее, продифференцируем $I_n(x)$.

$$I_n'(x) = \left(\int_0^\infty t^n \phi\left(A\frac{x-t}{\sqrt{t}}\right) dt\right)' =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \exp(A^2 x) \int_0^\infty t^{n-1/2} \exp\left(-\frac{A^2 x}{2}\frac{1}{t} - \frac{A^2}{2} t\right) dt.$$

Пользуясь, как и в предыдущем разделе, хорошо известными свойствами циллиндричских фунцкий мнимого аргумента $K_n(z)$, продолжаем.

$$I_n'(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \exp(A^2 x) 2x^{n+1/2} K_{n+1/2}(A^2 x),$$

$$K_{n+1/2}(z) = \frac{\sqrt{2\pi} z^{n+1/2}}{2^{n+1} n!} \int_1^\infty (t^2-1)^n e^{-zt} dt.$$

Обозначим интеграл

$$J_k(z) = \int_1^\infty t^k e^{-zt} dt \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Понятно, что

$$J_0(z) = \frac{1}{z} e^{-z}, \qquad J_k(z) = \frac{k}{z} J_{k-1}(z) + \frac{1}{z} e^{-z} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда

$$J_k(z) = e^{-z} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i! z^{k+1-i}},$$

$$K_{n+1/2}(z) = e^{-z} \frac{\sqrt{2\pi} z^{n+1/2}}{2^{n+1} n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \sum_{i=0}^{2k} \frac{(2k)!}{i! z^{2k+1-i}} =$$

$$= e^{-z} \frac{\sqrt{2\pi}}{2 z^{n+1/2}} \frac{z^{2n+1}}{2^n n!} \sum_{i=0}^{2n} z^{-i-1} \sum_{k=0}^{2n} C_n^k (-1)^k \frac{(2k)!}{(2k-i)!} =$$

$$= e^{-z} \frac{\sqrt{2\pi}}{2 z^{n+1/2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{k!(n-k)! 2^k} z^{n-k}.$$

Тогда

$$I_n'(x) = \frac{1}{A^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{k!(n-k)! 2^k} (A^2 x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{A^{2k}} \frac{(n+k)!}{k!(n-k)! 2^k} x^{n-k}.$$

Далее,

$$1 - \frac{n+1}{T^{n+1}} I_{nT}(T) = \frac{n+1}{T^{n+1}} \int\limits_0^T t^n \Phi\left(-A\frac{T-t}{\sqrt{t}}\right) dt \leq$$

$$\leq \frac{n+1}{T} \int\limits_0^T \Phi\left(-A\frac{T-t}{\sqrt{t}}\right) dt \leq \frac{n+1}{A\sqrt{2\pi T}}.$$

Таким образом, для интеграла I_{nT} на промежутке $x \in [0, T]$ верна оценка

$$\frac{n+1}{T^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{A^{2k}} \frac{(n+k)!}{k!(n-k+1)!2^k} x^{n-k+1} - \frac{n+1}{A\sqrt{2\pi T}} \leq$$

$$\leq \frac{n+1}{T^{n+1}} I_{nT}(x) \leq$$

$$\leq \frac{n+1}{T^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{A^{2k}} \frac{(n+k)!}{k!(n-k+1)!2^k} x^{n-k+1} + \frac{(2n+1)!}{n!2^{n+1}} \frac{1}{(A^2T)^{n+1}}. \tag{5.3.5}$$

Обозначим

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{A^{2k}} \frac{(n+k)!}{k!(n-k+1)!2^k} x^{n-k+1}.$$

Очевидно, что функция $W_n(x)$ – возрастающая при положительном x. Тогда уравнение

$$W_n(x) = C$$

при положительном C имеет единственное решение, которое обозначим через $w_n(C)$.

Следовательно, решения уравнений (5.3.3), (5.3.4) выражаются следующим образом.

$$u_1 = m\lambda T^{n+1} w_n \left(\delta - \frac{(2n+1)!}{n!2^{n+1}} \frac{1}{(A^2T)n+1} - \frac{n+1}{n+1/2} \frac{L_3}{\sqrt{\lambda T}}\right),$$

$$u_2 = m\lambda T^{n+1} w_n \left(\delta + \frac{n+1}{A\sqrt{2\pi T}} + \frac{n+1}{n+1/2} \frac{L_3}{\sqrt{\lambda T}}\right).$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 5.3.1. *Пусть $m > 0$,*

$$\psi_2(\lambda T) \le \delta \le 1 - \psi_1(\lambda T).$$

Тогда

$$m\lambda T^{n+1} w_n(\delta - \psi_2(\lambda T)) \le u_0 \le m\lambda T^{n+1} w_n(\delta + \psi_1(\lambda T)),$$

где $w_n(C)$ – положительное решение уравнения

$$\frac{n+1}{T^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\mu_2}{2m^2\lambda}\right)^k \frac{(n+k)!}{k!(n-k+1)!} x^{n-k+1} = C. \tag{5.3.6}$$

$$\psi_1(z) = \frac{n+1}{n+1/2} \cdot \frac{L_3}{\sqrt{z}} + \frac{n+1}{m\sqrt{z}} \sqrt{\frac{\mu_2}{2\pi}}, \tag{5.3.7}$$

$$\psi_2(z) = \frac{n+1}{n+1/2} \cdot \frac{L_3}{\sqrt{z}} + \frac{(2n+1)!}{n!} \left(\frac{\mu_2}{2m^2 z}\right)^{n+1}. \tag{5.3.8}$$

При $n = 0$ $I_0'(t) = 1$, поэтому мы приходим к уже полученной оценке

$$\frac{x}{T} - \frac{1}{A\sqrt{2\pi T}} \le \frac{1}{T} I_{0T}(x) \le \frac{x}{T} + \frac{1}{2A^2 T}.$$

При $n = 1$

$$I_1'(t) = x + \frac{1}{A^2},$$

поэтому для $I_{1T}(x)$ можно записать

$$\frac{x^2}{T^2} + \frac{2x}{A^2T^2} - \frac{1}{A\sqrt{2\pi T}} \le \frac{2}{T^2} I_{1T}(x) \le \frac{x^2}{T^2} + \frac{2x}{A^2T^2} + \frac{3}{2A^4T^2}.$$

Ясно, что

$$w_1(C) = \frac{1}{A^2}\left(\sqrt{1 + CA^4T^2} - 1\right) = \frac{1}{\lambda m^2}\left(\sqrt{\mu_2^2 + Cm^4\lambda^2T^2} - \mu_2\right).$$

Следовательно, верно следующее

Следствие 5.3.1. *Пусть $m > 0$,*

$$\psi_2(\lambda T) \le \delta \le 1 - \psi_1(\lambda T).$$

Тогда при функциях издержек

$$c_1(t) = c_1 t, \qquad c_2(t) = c_2 t$$

верна следующая оценка

$$\frac{T^2}{m}\left(\sqrt{\mu_2^2+(\delta-\psi_2(\lambda T))m^4\lambda^2T^2}-\mu_2\right) \le$$
$$\le u_0 \le$$
$$\le \frac{T^2}{m}\left(\sqrt{\mu_2^2+(\delta+\psi_1(\lambda T))m^4\lambda^2T^2}-\mu_2\right),$$

где

$$\psi_1(z)=\frac{4}{3}\frac{L_3}{\sqrt{z}}+\frac{1}{m\sqrt{z}}\sqrt{\frac{\mu_2}{2\pi}}, \tag{5.3.9}$$

$$\psi_2(z)=\frac{4}{3}\frac{L_3}{\sqrt{z}}+\frac{3\mu_2^2}{2m^4z^2}. \tag{5.3.10}$$

В случае более сложных функций $c_1(t)$ и $c_2(t)$ понятно, что их можно приблизить конечным степенным рядом и воспользоваться методом оценки интеграла, предложенным в этом разделе.

5.4 Об оптимальном начальном капитале страховой компании.

В актуарной математике в качестве одной из основных оптимизационных задач рассматривается задача об оптимальном значении начального капитала страховой компании. При этом в качестве критерия оптимальности, как правило, используется вероятность неразорения страховой компании. Хорошо известны классические результаты типа теоремы Краме́ра и неравенства Лундберга, определяющие экспоненциальное убывание вероятности разорения при возрастании начального капитала (см., например, (Bowers, 1986), (Grandell, 1990)). Однако, на наш взгляд, практическая польза этих результатов, при всей их математической красоте, далеко не так велика как хотелось бы (особенно в условиях современного российского страхового рынка). Действительно, во-первых, красота упомянутых результатов достигается за счет довольно сильных модельных предположений (например, о том, что поток страховых требований должен быть однородным пуассоновским, то есть, иметь постоянную интенсивность, о линейном возрастании во времени дохода страховой компании, обусловленного страховыми взносами клиентов, и об игнорировании возможности инвестирования свободного капитала страховой компании в прибыльные проекты). Во-вторых, хотя "разорению" можно дать вполне строгое математическое определение как существованию такого момента времени, в который резерв страховой компании становится отрицательным, на практике, как правило, разорения не происходит, поскольку в упомянутой выше ситуации существует возможность, например, взять кредит в банке и расплатиться с клиентами за счет этого кредита.

Рассмотрим иной критерий оптимальности, связанный как с возможностью инвестирования свободного капитала в прибыльные проекты, так и с возможностью в необходимых случаях пользоваться кредитами.

Предположим, что в начальный момент некоторого отрезка времени $[0, T]$ страховая компания имеет стартовый капитал u. Пусть $N(t)$, $0 \leq t \leq T$, – число страховых выплат до момента t. Как и раньше, будем считать, что $N(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Пусть X_i – страховая выплата по i-ому страховому случаю. Рассмотрим простейшую модель функционирования страховой компании, согласно которой предполагается, что прирост капитала страховой компании за счет страховых взносов клиентов линеен во времени, так что потери страховой компании за период времени $[0, t]$ имеют вид

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - \alpha\lambda t,$$

где α – ставка страховой премии. Тогда величина

$$R(t) = u - S(t) = u + \alpha\lambda t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

имеет смысл резерва страховой компании в момент времени t. Будем считать, что с.в. $X_1, X_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены, а процесс $N(t)$ независим от последовательности $X_1, X_2, \ldots$ в любой момент времени t.

Как и ранее, мы будем использовать обозначения $\mathsf{E}X_i = m$, $\mathsf{D}X_i = \sigma^2$, $\mathsf{E}X_i^2 = \mu_2$ $(= m^2 + \sigma^2)$, $\mathsf{E}X_i^3 = \mu_3$.

5.5 Оценки для начального капитала страховой компании.

Пусть $c_1(t) > 0$ – издержки в момент t на единицу времени на единицу средств из-за "пролеживания" денег ввиду их напрасного привлечения в резерв. В качестве $c_1(t)$ можно взять, например, доходность ценных бумаг, в которые страховая компания могла бы вложить средства с целью получения прибыли, которую фактически она теряет (ясно, что эта характеристика может изменяться с течением времени). Пусть $c_2(t) > 0$ – издержки в момент t на единицу средств на единицу времени из-за нехватки денег при необходимости их выплаты клиенту. В качестве $c_2(t)$ можно взять, например, безрисковый банковский процент, при котором компания может взять кредит в банке для погашения задолженности клиентам (ясно, что эта характеристика также может изменяться с течением времени). Тогда средние суммарные издержки $D(u)$ страховой компании за время T определяются соотношением (5.1.1). Мы рассматриваем задачу об оптимизации величины начального капитала при условии, что

$$c_1(t) = c_1 t^n, \qquad c_2(t) = c_2 t^n,$$

где n – целое неотрицительное. Если в качестве критерия оптимальности мы примем $D(u)$, то есть если мы будем искать такое значение начального капитала u_0, при котором минимальны средние суммарные издержки (5.1.1), то в соответствии со сказанным во введении, u_0 удовлетворяет уравнению (5.1.3). Однако без полной информации о распределении страховых требований решить уравнение (5.1.3) невозможно. Поэтому мы будем искать двусторонние оценки для решения этого уравнения.

Несложно видеть, что $\mathsf{E}S(t) = (m-\alpha)\lambda t$, $\mathsf{D}S(t) = \mu_2\lambda t$. Согласно условию средней безубыточности деятельности страховой компании, должно быть $\alpha > m$, откуда $\mathsf{E}S(t) < 0$. Заметим, что в первой задаче (о планировании оптимального резерва) выполнялось неравенство, противоположное последнему. Обозначим $m_1 = m - \alpha$. Из сказанного выше вытекает, что $m_1 < 0$. Верны оценки (5.2.1) и (5.3.3) с заменой m на m_1. Поэтому оптимальное значение начального капитала u_0, будучи решением уравнения (5.3.1), может быть оценено решениями уравнений (5.3.3) и (5.3.4), в которых m заменено на m_1.

Теорема 5.5.1. *Пусть $\alpha > m$,*

$$\psi_1(\lambda T) \le \delta \le 1 - \psi_2(\lambda T).$$

Тогда

$$-(\alpha - m)\lambda T^{n+1} w_n(1 - \delta + \psi_1(\lambda T)) \le u_0 \le -(\alpha - m)\lambda T^{n+1} w_n(1 - \delta - \psi_2(\lambda T)),$$

где $w_n(C)$ – положительное решение уравнения (5.3.6), $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ такие же, как и в (5.3.7), (5.3.8) соответственно, но с заменой m на $(\alpha - m)$.

Доказательство. Мы будем искать оценки для решений u_1 и u_2 соответственно уравнений (5.3.3) и (5.3.4), используя уже полученные результаты. Снова положим

$$\frac{u}{m_1 \lambda} = x, \qquad m_1 \sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} = A.$$

На сей раз $A < 0$, поэтому

$$\frac{1}{T} \int_0^T \Phi\left(\frac{u - m_1 \lambda t}{\sqrt{\mu_2 \lambda t}}\right) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi\left(-|A| \frac{x - t}{\sqrt{t}}\right) dt \equiv I^-_{nT}(x).$$

Несложно убедиться, что

$$\frac{n+1}{T^{n+1}} I^-_{nT}(x) = 1 - \frac{n+1}{T^{n+1}} I_{nT}(x).$$

Поэтому с учетом оценки (5.3.5) мы имеем

$$1 - \frac{n+1}{T^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{A^{2k}} \frac{(n+k)!}{k!(n-k+1)!2^k} x^{n-k+1} - \frac{(2n+1)!}{n!2^{n+1}} \frac{1}{(A^2 T)^{n+1}} \le$$

$$\le \frac{n+1}{T^{n+1}} I^-_{nT}(x) \le$$

$$\le 1 - \frac{n+1}{T^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{A^{2k}} \frac{(n+k)!}{k!(n-k+1)!2^k} x^{n-k+1} + \frac{n+1}{|A|\sqrt{2\pi T}},$$

откуда мы получаем нужные оценки. Теорема доказана.

Для случая $n = 0$ мы получаем следующее следствие, уточняющее результат, полученный в (Кашаев и Королев, 1999).

Следствие 5.5.1. *При $\alpha > m$ верна оценка начального капитала*

$$-(\alpha - m)\lambda T(1 - \delta + \psi_1(\lambda T)) \le u_0 \le -(\alpha - m)\lambda T(1 - \delta - \psi_2(\lambda T)),$$

где $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ такие же, как и в (5.2.5), (5.2.6), но с заменой m на $(\alpha - m)$.

Следствие 5.5.2. *Пусть $m < 0$,*

$$\psi_1(\lambda T) \le \delta \le 1 - \psi_2(\lambda T).$$

Тогда при функциях издержек

$$c_1(t) = c_1 t, \qquad c_2(t) = c_2 t$$

верна следующая оценка для начального капитала страховой компании

$$-\frac{T^2}{\alpha - m}\left(\sqrt{\mu_2^2 + (1 - \delta + \psi_1(\lambda T))(\alpha - m)^4\lambda^2 T^2} - \mu_2\right) \le$$

$$\le u_0 \le -\frac{T^2}{\alpha - m}\left(\sqrt{\mu_2^2 + (1 - \delta - \psi_2(\lambda T))(\alpha - m)^4\lambda^2 T^2} - \mu_2\right),$$

где $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ такие же, как и в (5.3.9) и (5.3.10) соответственно, но с заменой m на $(\alpha - m)$.

Замечание 5.5.1. Из Теоремы 5.5.1 следует довольно неожиданный вывод: при достаточно большом значении произведения λT оптимальное значение стартового капитала должно быть отрицательным. Иными словами, начинать дело можно, имея долги. При этом Теорема 5.5.1 устанавливает пределы, в которых должно лежать оптимальное значение долга. Все это означает, что рассматриваемый критерий оптимальности, минимизирующий средние издержки, является довольно "мягким".

Замечание 5.5.2. Поскольку левая часть неравенства (5.2.1) не превосходит единицы, в его правой части можно поставить выражение $\min\{1,\ L_3/\sqrt{\lambda t}\}$. Это приведет к тому, что в уравнениях (5.2.5), (5.2.6), (5.3.7), (5.3.8), а вместе с ними и во всех последующих рассуждениях, включая формулировки Теорем 5.2.1, 5.3.1 и 5.5.1, при $\lambda T \ge L_3^2$ выражение $2L_3/\sqrt{\lambda T}$ можно заменить меньшей величиной $(2 - L_3/\sqrt{\lambda T})L_3/\sqrt{\lambda T}$, а при $\lambda T \le L_3^2$ выражение $2L_3/\sqrt{\lambda T}$ можно заменить единицей.

5.6 Гарантированные оценки для оптимальной ставки страховой премии и времени достижения желаемого значения резерва.

Рассмотрим резерв страховой компании $R(t)$ в момент t. Стратегию функционирования страховой компании разумно выбирать, исходя из требования о том, чтобы в конце рассматриваемого периода резерв, имеющийся в распоряжении страховой компании, был достаточно велик. Это требование можно понимать по-разному. Можно, например, задать некоторое число $R_0 > 0$ и потребовать, чтобы

$$\mathsf{E}R(T) \geq R_0. \tag{5.6.1}$$

Можно также задать некоторые числа $\gamma \in (0,1)$ (по возможности, γ должно быть близким к единице) и $R_0 > 0$ и потребовать, чтобы

$$\mathsf{P}(R(T) \geq R_0) \geq \gamma. \tag{5.6.2}$$

Выполнение условий (5.6.1) или (5.6.2) может быть обеспечено с помощью разумного варьирования величин стартового капитала u и ставки страховой премии α. Теорема 5.3.1 позволяет нам сформулировать следующие задачи и найти их приближенные (гарантированные) решения.

Задача 5.6.1. Определить значения величин стартового капитала u и ставки страховой премии α, гарантирующие выполнение требования (5.6.1) при условии, что средние издержки, понимаемые в смысле (5.1.1), минимальны.

Задача 5.6.2. Определить значения величин стартового капитала u и ставки страховой премии α, гарантирующие выполнение требования (5.6.2) при условии, что средние издержки, понимаемые в смысле (5.1.1), минимальны.

Рассмотрим эти задачи при условии средней безубыточности функционирования страховой компании, то есть $\alpha > m$, и при постоянных функциях издержек, то есть при $n = 0$. Для оптимального в смысле (5.1.1) начального капитала u_0, как это было получено предыдущем разделе, верна оценка, установленная Теоремой 5.2.1:

$$u_0 \geq -\lambda T \left[(\alpha - m)\left(1 - \delta + \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}\right) + \sqrt{\frac{\mu_2}{2\pi\lambda T}}\ \right]. \tag{5.6.3}$$

В Задаче 5.6.1, очевидно, $\mathsf{E}R(T) = u + \lambda T(\alpha - m)$, поэтому

$$u_0 + \lambda T(\alpha - m) \geq R_0,$$

откуда

$$\alpha \geq m + \frac{R_0 - u_0}{\lambda T}. \tag{5.6.4}$$

Поскольку, как мы уже говорили выше, определить точное значение u_0 практически невозможно, для получения гарантированной нижней оценки для α_1, являющегося решением Задачи 5.6.1, заменим неравенство (5.6.4) более жестким, увеличив его правую часть путем подстановки вместо u_0 его нижней оценки (5.6.3) и вместо (5.6.4) будем искать минимальное решение α_1^* неравенства

$$\alpha \geq m + \frac{R_0}{\lambda T} + (\alpha - m)\left(1 - \delta + \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}\right) + \sqrt{\frac{\mu_2}{2\pi\lambda T}}.$$

Мы приходим к неравенству

$$(\alpha - m)\left(\delta - \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}\right) \geq \frac{R_0}{\lambda T} + \sqrt{\frac{\mu_2}{2\pi\lambda T}},$$

откуда мы получаем гарантированную нижнюю оценку для решения Задачи 5.6.1:

$$\alpha_1 \geq \alpha_1^* = m + \left(\frac{R_0}{\lambda T} + \sqrt{\frac{\mu_2}{2\pi\lambda T}}\right)\left(\delta - \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}\right)^{-1}.$$

Эта оценка, очевидно, имеет смысл при $\lambda T > 4L_3^2\delta^{-2}$.

Теперь рассмотрим Задачу 5.6.2. Квантиль порядка γ стандартного нормального распределения мы будем обозначать n_γ: $\Phi(n_\gamma) = \gamma$. Очевидно, что

$$\mathsf{P}(R(T) \geq R_0) = \mathsf{P}(S(T) \leq u - R_0). \tag{5.6.5}$$

Используя (5.6.5) и неравенство (5.2.1), заменим условие (5.6.2) более жестким:

$$\mathsf{P}(R(T) \geq R_0) \geq \Phi\left(\frac{u - R_0 + \lambda T(\alpha - m)}{\sqrt{\lambda T \mu_2}}\right) - \frac{L_3}{\sqrt{\lambda T}} \geq \gamma. \tag{5.6.6}$$

Обозначим $\gamma_T = \gamma + L_3/\sqrt{\lambda T}$. Тогда из (5.6.6) получим равносильное неравенство

$$\frac{u - R_0 + \lambda T(\alpha - m)}{\sqrt{\lambda T \mu_2}} \geq n_{\gamma_T}. \tag{5.6.7}$$

Снова используем то обстоятельство, что неравенство (5.6.3) дает оценки для значения u_0, обеспечивающего минимум средних издержек, при любом α. Поэтому α_2, являющееся решением Задачи 5.6.2, удовлетворяет неравенству $\alpha_2 \geq \alpha_2'$, где α_2' – минимальное значение α, удовлетворяющее неравенству (5.6.7), в которое вместо u подставлено u_0:

$$u_0 - R_0 + \lambda T(\alpha - m) \geq n_{\gamma_T}\sqrt{\lambda T \mu_2},$$

откуда

$$\alpha \geq m + \frac{1}{\lambda T}\left(R_0 - u_0 + n_{\gamma_T}\sqrt{\lambda T \mu_2}\right). \tag{5.6.8}$$

Снова заменим неравенство (5.6.8) более жестким, воспользовавшись оценкой для u_0, устанавливаемой (5.6.3). Мы получим, что $\alpha_2 \geq \alpha_2' \geq \alpha_2^*$, где α_2^* – минимальное решение неравенства

$$\alpha \geq m + \frac{R_0}{\lambda T} + (\alpha - m)\left(1 - \delta + \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}\right) + \sqrt{\frac{\mu_2}{2\pi\lambda T}} + n_{\gamma_T}\sqrt{\frac{\mu_2}{\lambda T}}.$$

Мы приходим к неравенству

$$(\alpha - m)\left(\delta - \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}\right) \geq \frac{R_0}{\lambda T} + \sqrt{\frac{\mu_2}{\lambda T}}\left(n_{\gamma_T} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right),$$

откуда мы получаем гарантированную нижнюю оценку для решения Задачи 5.6.2:

$$\alpha_2 \geq \alpha_2^* = m + \left[\frac{R_0}{\lambda T} + \sqrt{\frac{\mu_2}{\lambda T}}\left(n_{\gamma_T} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\right]\left(\delta - \frac{2L_3}{\sqrt{\lambda T}}\right)^{-1}.$$

С учетом очевидного требования $\gamma_T < 1$ заметим, что эта оценка имеет смысл при $\lambda T > L_3^2 \max\{4\delta^{-2}, (1-\gamma)^{-2}\}$.

Неравенство (5.6.3) позволяет поставить еще две задачи и получить оценки для их решений. Пусть, как и выше, R_0 и γ – два заранее заданных числа, $0 < \gamma < 1$.

Задача 5.6.3. При заданной ставке страховых премий α найти такое T_0, чтобы для $T \geq T_0$ было выполнено условие (5.6.1) при условии, что издержки, понимаемые в смысле (5.1.1), минимальны.

Задача 5.6.4. При заданной ставке страховых премий α найти такое T_0, чтобы для $T \geq T_0$ было выполнено условие (5.6.2) при условии, что издержки, понимаемые в смысле (5.1.1), минимальны.

Нижние оценки для решений этих задач можно найти, как и в предыдущем пункте, заменяя соответственно условия (5.6.1) и (5.6.2) более жесткими. А именно, условие (5.6.1) принимает вид

$$T \geq \frac{R_0 - u_0}{\lambda(\alpha - m)}.$$

Если мы теперь заменим это неравенство более сильным, подставив вместо u_0 его нижнюю оценку из Теоремы 5.3.1, мы получим неравенство

$$T(2-\delta) + \sqrt{\frac{T}{\lambda}}\left(2L_3 + \frac{\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{2\pi}(\alpha - m)}\right) - \frac{R_0}{\lambda(\alpha - m)} \geq 0,$$

решение которого (а стало быть, и гарантированная оценка для решения Задачи 5.6.3) имеет вид

$$T \geq T_0^{(3)} = \frac{1}{4\lambda(2-\delta)^2}\times$$

$$\times\left[\sqrt{\left(2L_3 + \frac{\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{2\pi}(\alpha - m)}\right)^2 + \frac{4(2-\delta)R_0}{\alpha - m}} - \left(2L_3 + \frac{\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{2\pi}(\alpha - m)}\right)\right]^2.$$

Чтобы найти гарантированную оценку для решения Задачи 5.6.4, мы дважды заменим условие (5.6.2) более сильным. Сначала воспользуемся нормальной аппроксимацией и получим неравенство

$$u_0 - R_0 + \lambda T(\alpha - m) \geq n_{\gamma_T}\sqrt{\lambda T \mu_2},$$

в котором затем заменим u_0 его нижней оценкой, даваемой неравенством (5.6.3), окончательно получив неравенство

$$\lambda T(1 - \delta + \alpha - m) + \sqrt{\lambda T}\left(2L_3 + \frac{\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{2\pi}(\alpha - m)} - n_{\gamma_T}\sqrt{\mu_2}\right) - R_0 \geq 0$$

относительно T. Решение этого неравенства (и, значит, гарантированная оценка для решения Задачи 5.6.4) имеет вид

$$T \geq T_0^{(4)} = \frac{1}{4\lambda(1-\delta+\alpha-m)^2}\left[n_{\gamma_T}\sqrt{\mu_2} - 2L_3 - \frac{\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{2\pi}(\alpha - m)} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\left(n_{\gamma_T}\sqrt{\mu_2} - 2L_3 - \frac{\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{2\pi}(\alpha - m)}\right)^2 + 4R_0(1-\delta+\alpha-m)}\,\right]^2.$$

5.7 Оптимизация параметров процесса риска, связанная с нежелательностью избыточного размера стартового капитала

Рассмотрим несколько измененную постановку задачи минимизации средних издержек деятельности страховой компании, рассматриваемой в этом разделе. Пусть $c_1(t,u)$ – издержки в момент t на единицу средств начального капитала u. Будем считать, что если $u \geq 0$, то $c_1(t,u) = c_1(t) > 0$. В этом случае $c_1(t)$ имеет смысл издержек из-за "пролеживания" денег ввиду их напрасного привлечения в резерв. В качестве $c_1(t)$ можно взять, например, доходность ценных бумаг, в которые страховая компания могла бы вложить средства с целью получения прибыли, которую фактически она теряет (ясно, что эта характеристика может изменяться с течением времени). Если же $u < 0$, что соответствует ситуации, в которой компания начинает страховой бизнес, имея долги, то положим $c_1(t,u) = -c_0(t) > 0$. Здесь $|c_0(t)|$ имеет смысл "штрафа" за наличие долгов. Например, в качестве $|c_0(t)|$ можно взять процент, под который следует возвратить долги. Пусть $c_2(t) > 0$ – издержки в момент t на единицу средств на единицу времени из-за нехватки денег при необходимости их выплаты клиенту. В качестве $c_2(t)$ можно взять, например, безрисковый банковский процент, при котором компания может взять кредит в банке для погашения задолженности клиентам (ясно, что эта характеристика также может изменяться с течением времени). Тогда средние суммарные издержки $D(u)$ страховой компании за время T определяются соотношением

$$D(u) = u\int\limits_0^T c_1(t,u)dt + \int\limits_0^T c_2(t)\mathsf{E}(S(t)-u)^+dt =$$

$$= \begin{cases} -u\int\limits_0^T c_0(t)dt + \int\limits_0^T c_2(t)\mathsf{E}(S(t)-u)^+dt, & \text{если } u \leq 0; \\ u\int\limits_0^T c_1(t)dt + \int\limits_0^T c_2(t)\mathsf{E}(S(t)-u)^+dt, & \text{если } u \geq 0. \end{cases} \quad (5.7.1)$$

Подобный критерий эффективности деятельности страховой компании был рассмотрен в этом разделе, в котором издержки, связанные с недостатком средств, понимаются так же, как и здесь, но издержки другого типа связаны с нежелательным избытком резерва в каждый момент времени, а не с избытком начального капитала, как здесь.

Мы будем искать такое значение начального капитала u_0, при котором минимальны средние суммарные издержки (5.7.1).

Для простоты предположим, что случайные величины X_j абсолютно непрерывны. Поэтому для каждого $t \in [0, T]$ существует плотность случайной величины $S(t)$, которую мы обозначим $f_t(x),\ x \in \mathbb{R}$ и при $u < 0$ мы можем представить $D(u)$ в виде

$$D(u) = -u\int_0^T c_0(t)dt + \int_0^T c_2(t)\mathsf{E}S(t)\mathbf{1}(S(t) > u)dt - u\int_0^T c_2(t)\mathsf{P}(S(t) > u)dt =$$

$$= -u\int_0^T c_0(t)dt + \int_0^T c_2(t)\mathsf{E}S(t)dt -$$

$$-\int_0^T c_2(t)\left[\int_{-\infty}^u xf_t(x)dx\right]dt - u\int_0^T c_2(t)dt + u\int_0^T c_2(t)\left[\int_{-\infty}^u f_t(x)dx\right]dt.$$

Дифференцируя $D(u)$ по u при $u < 0$, получаем

$$\frac{dD(u)}{du} = -\int_0^T c_0(t)dt - u\int_0^T c_2(t)f_t(u)dt - \int_0^T c_2(t)dt +$$

$$+\int_0^T c_2(t)\left[\int_{-\infty}^u f_t(x)dx\right]dt + u\int_0^T c_2(t)f_t(u)dt =$$

$$= -\int_0^T [c_0(t) + c_2(t)]dt + \int_0^T c_2(t)\mathsf{P}(S(t) < u)dt.$$

Отсюда несложно видеть, что при $u < 0$ производная функции $D(u)$ по u отрицательна, откуда следует, что $D(u) \geq D(0)$ для любого $u < 0$. Поэтому минимум функции $D(u)$ достигается на неотрицательных u (если он достигается на конечном u).

При $u \geq 0$

$$D(u)=u\int\limits_0^T c_1(t)dt+\int\limits_0^T c_2(t)\mathsf{E}S(t)\mathbf{1}(S(t)>u)dt-u\int\limits_0^T c_2(t)\mathsf{P}(S(t)>u)dt=$$

$$=u\int\limits_0^T c_1(t)dt+\int\limits_0^T c_2(t)\mathsf{E}S(t)dt-$$

$$-\int\limits_0^T c_2(t)\left[\int\limits_{-\infty}^u xf_t(x)dx\right]dt-u\int\limits_0^T c_2(t)dt+u\int\limits_0^T c_2(t)\left[\int\limits_{-\infty}^u f_t(x)dx\right]dt.$$

Дифференцируя $D(u)$ по u при $u\geq 0$, получаем

$$\frac{dD(u)}{du}=\int\limits_0^T c_1(t)dt-u\int\limits_0^T c_2(t)f_t(u)dt-$$

$$-\int\limits_0^T c_2(t)dt+\int\limits_0^T c_2(t)\left[\int\limits_{-\infty}^u f_t(x)dx\right]dt+u\int\limits_0^T c_2(t)f_t(u)dt=$$

$$=\int\limits_0^T [c_1(t)-c_2(t)]dt+\int\limits_0^T c_2(t)\mathsf{P}(S(t)<u)dt=$$

$$=\int\limits_0^T c_1(t)dt-\int\limits_0^T c_2(t)\mathsf{P}(S(t)\geq u)dt.$$

Приравнивая эту производную нулю, мы приходим к уравнению

$$\int\limits_0^T c_2(t)\mathsf{P}(S(t)\geq u)dt=\int\limits_0^T c_1(t)dt. \tag{5.7.2}$$

Мы будем считать, что $c_1(t)=c_1t^n$, $c_2(t)=c_2t^n$, где n – неотрицательное целое. Если $c_1>c_2$, то, как несложно видеть, $\frac{dD(u)}{du}>0$. Поэтому с учетом сказанного выше мы заключаем, что при $c_1>c_2$ оптимальным значением является $u_0=0$. Таким образом, единственным нетривиальным случаем остается $c_1<c_2$. При таких c_1 и c_2 уравнение (5.7.2) принимает вид

$$\frac{n+1}{T^{n+1}}\int\limits_0^T t^n\mathsf{P}(S(t)<u)dt=\delta, \tag{5.7.3}$$

где $\delta = (c_2 - c_1)/c_2$. Таким образом, задача минимизации средних суммарных издержек страховой компании, понимаемых в смысле (5.7.1), свелась к отысканию неотрицательного решения уравнения (5.7.3). Другими словами,

$$u_0 = (u^\star)^+,$$

где $u^\star$ – решение уравнения (5.7.3).

Поскольку мы уже решили аналогичную задачу, то верна

Теорема 5.7.1. *Если $m \geq \alpha$,*

$$\psi_2(\lambda T) \leq \delta \leq 1 - \psi_1(\lambda T),$$

то

$$m_1 \lambda T^{n+1} w_n(\delta - \psi_2(\lambda T))^+ \leq u_0 \leq m_1 \lambda T^{n+1} w_n(\delta + \psi_1(\lambda T)),$$

если $m < \alpha$,

$$\delta \leq 1 - \psi_2(\lambda T),$$

то

$$0 \leq u_0 \leq (-|m_1| \lambda T^{n+1}(1 - \delta - \psi_2(\lambda T)))^+,$$

где $m_1 = \alpha - m$, $w_n(C)$ – положительное решение уравнения (5.3.6), $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ такие же, как и в (5.3.7), (5.3.8), но с заменой m на m_1.

Литература

1. И. И. Банис. Оценка скорости сходимости в интегральной предельной теореме. Литов. математ. сб., т. 12, №1, 1972, с. 41-46.

2. В. Е. Бенинг и В. Ю. Королев. Асимптотическое поведение обобщенных неординарных процессов Кокса. – *Вестник Моск. ун-та, сер. 15 вычислит. математика и кибернетика,* 1997, вып. 4, с. 3-16.

3. В. Е. Бенинг и В. Ю. Королев. *Введение в математическую теорию риска.* МАКС Пресс, Москва, 2000, 184 с.

4. В. Е. Бенинг и В. Ю. Королев. *Обобщенные процессы риска.* МАКС Пресс, Москва, 2000, 194 с.

5. А. А. Боровков. *Курс теории вероятностей.* "Наука", Москва, 1972.

6. Е. В. Булинская. О стоимостном подходе в страховании. – *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 2003, в печати.

7. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров. *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.* ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1949.

8. Б. В. Гнеденко и Х. Фахим. Об одной теореме переноса. – *ДАН СССР*, 1969, т. 187, No 1, с. 15-17.

9. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* ГИФМЛ, Москва, 1962

10. Р. Л. Добрушин. Лемма о пределе сложной случайной функции. – *Успехи математических наук*, 1955, т. 10, No 2, с. 157-159.

11. А. Кароблис. Об аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин. Литов. математ. сб., т. 23, №1, 1983, с. 101-107.

12. В. Ю. Королев. Сходимость случайных последовательностей с независимыми случайными индексами. I. – *Теория вероятностей и ее применения*, 1994, т. 39, вып. 2, с. 313-333.

13. В. Ю. Королев. *Вероятностные модели. Введение в асимптотическую теорию влучайного суммирования.* МАКС Пресс, Москва,1997.

14. А. Кофман. *Методы и модели исследования операций.* "Мир", Москва, 1966.

15. В. М. Круглов. *Дополнительные главы теории вероятностей.* Высшая школа, Москва, 1984.

16. В. М. Круглов. Слабая компактность случайных сумм независимых случайных величин. – *Теория вероятностей и ее применения*, 1998, т. 43, No 2, с. 248-271.

17. В. М. Круглов и В. Ю. Королев. *Предельные теоремы для случайных сумм.* Изд-во Московского университета, Москва, 1990, 269 с.

18. М. Лоэв. *Теория вероятностей.* "Иностранная литература", 1962.

19. А. А. Миталаускас. Оценка остаточного члена в интегральной предельной теореме в случае сходимости к устойчивому закону. Литов. математ. сб., т. 11, №3, 1971, с. 627-639.

20. С. В. Нагаев. Некоторые предельные теоремы для больших уклонений. *Теория вероятн. и ее применен.*, 1965, т.10, вып. 2, с 231-254.

21. Л. В. Осипов. Об асимптотических разложениях функции распределения суммы случайных величин с неравномерными оценками остаточного члена. – *Вестник Ленинградского университета*, 1972, No 1, с. 51-59.

22. В. Паулаускас. Об одном усилении теоремы Ляпунова. Литов. математ. сб., т. 9, №12, 1969, с. 323-328.

23. Н. Я. Петраков и В. И. Ротарь. *Фактор неопределенности и управление экономическими системами.* "Наука", Москва, 1985.

24. В. В. Петров. *Суммы независимых случайных величин.* "Наука", Москва, 1972.

25. В. В. Петров. *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* "Наука", Москва, 1987.

26. А. В. Печинкин. О сходимости к нормальному закону сумм случайного числа случайных слагаемых. – *Теория вероятностей и ее применения*, 1973, т. 18, No 2, с. 380-382.

27. Г. В. Ротарь. Одна задача управления резервом. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1972, т. 17, вып. 3.

28. Г. В. Ротарь. *Некоторые задачи планирования резерва.* Дис. на соиск. уч. ст. канд. физ.-матем. наук, ЦЭМИ, Москва, 1972.

29. Г. В. Ротарь. Об одной задаче управления резервами. – *Экономика и мат. методы,* 1976, т. 12, вып. 3.

30. Д. Саас. О классах предельных распределений для сумм случайного числа одинаково распределенных случайных величин. – *Теория вероятностей и ее применения*, 1972, т. 17, No 3, с. 424-439.

31. К. И. Сатыбалдина. Абсолютные оценки скорости сходимости к устойчивым законам. *Теория вероятн. и ее применен.* т. 17, №4 1972, с. 773-775.

32. К. И. Сатыбалдина. К вопросу об оценке скорости сходимости в предельной теореме с устойчивым предельным законом. *Теория вероятн. и ее применен.* т. 18, №1 1973, с. 211-212.

33. Е. Сенета. *Правильно меняющиеся функции.* Наука, Москва, 1985.

34. С. Стейшунас. Об оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. Литов. математ. сб., т. 14, №2, 1974, с. 127-138.

35. И. С. Шиганов. Об уточнении верхней оценки константы в остаточном члене центральной предельной теоремы. – в сб. *Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды семинара.* ВНИИСИ, Москва, 1982, с. 109-115.

36. А. Н. Ширяев. *Теория вероятностей.* Наука, Москва, 1989.

37. П. Эмбрехтс и К. Клюппельберг. Некоторые аспекты страховой математики. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1993, т. 38, вып. 2, с. 375-416.

38. V. E. Bening and V. Yu. Korolev. *Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance.* VSP, Utrecht,2002,453pp.

39. N. L. Bowers et al. *Actuarial Mathematics.* Society of Actuaries, Itasca, IL, 1986.

40. R. Von Chossy and G. Rappl. Some approximation methods for the distribution of random sums. – *Insurance: Mathematics and Economics.* 1983, vol. 2, p. 251-270.

41. H. Cramér. *Collective Risk Theory.* Skandia Jubilee Volume, Stockholm, 1955.

42. G. Christoph and W. Wolf. Convergence Theorems with a stable limit law. Akademie Verlag, Berlin, 1993.

43. P. Embrechts, K. Klüppelberg and T. Mikosch. *Modeling Extremal Events.* Springer, Berlin–New York, 1998.

44. B. V. Gnedenko and V. Yu. Korolev. *Random Summation: Limit Theorems and Applications.* CRC Press, Boca Raton, 1996, 267pp.

45. J. Grandell. *Doubly Stochastic Poisson Processes.* Lecture Notes Math., vol. 529, 1976.

46. J. Grandell. *Aspects of Risk Theory.* Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1990.

47. A. Gut. *Stopped Random Walks.* Springer, New York, 1988.

48. V. Kalashnikov. *Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications. Risk Analysis, Reliability, Queueing.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1997.

49. L. B. Klebanov. *Heavy-tailed Distributions.* MATFYZ Press, Prague, 2003.

50. V. Yu. Korolev. A general theorem on limit behavior of superpositions of independent random processes with applications to Cox processes. – *Journal of Mathematical Sciences*, 1996, Vol. 81, No. 5, p. 2951-2956.

51. V. Yu. Korolev and V. M. Kruglov. A criterion of convergence of nonrandomly centered random sums of independent identically distributed random variables. – *Journal of Mathematical Sciences*, 1998, Vol. 89, No. 5, p. 1495-1506.

52. V. Yu. Korolev and S. Ya. Shorgin. On the absolute constant in the remainder term estimate in the central limit theorem for Poisson random sums. – in: *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics. Proceedings of the Fourth International Petrozavodsk Conference.* VSP, Utrecht, 1997, p. 305-308.

53. R. Michel. On Berry-Esseen results for the compound Poisson distribution. – *Insurance: Mathematics and Economics,* 1986, vol. 13, No. 1, p. 35-37.

54. L. Padits. On the analytical structure of the constant in the nonuniform version of then Esseen inequality. – *Statistics* (Akademie–Verlag, Berlin), 1989, Vol. 20, No. 3, p. 453-464.

55. S. T. Rachev. Probability metrics and the stability of stochastic models. Wiley, Clichester, 1991.

56. H. Robbins. The asymptotic distribution of the sum of a random number of random variables. – *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1948, vol. 54, No. 12, p. 1151-1161.

57. D. S. Silvestrov. *Limit Theorems for Randomly Stopped Stochastic Processes.* Research reports 2002 1-4, Department of Mathematics and Physics, Mälardalen University, Västeras, 2002, 405 pp.

58. D. Szasz. Limit theorems for the distributions of the sums of a random number of random variables. – *Annals of Mathematical Statistics*, 1972, vol. 43, No. 6, p. 1902-1913.

59. H. G. Tucker. Convolutions of distributions attracted to stable laws. – *Ann. Math. Statist.*, 1968, vol. 39, p. 1381-1390.

60. V. M. Zolotarev. Estimate of the closeness of two convolutions of distributions. In: Abstracts of Reports to the International Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics (in Russian), 1973, Vol. I, Vilnus, p. 257-259.

61. V. M. Zolotarev. *Modern Theory of Summation of Random Variables.* VSP, Utrecht, 1997.